Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Δακτυλίων και Modules (M 222)**

Τελική Εξέταση, Εαρινό Εξάμηνο 2005 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων.*

(ii) Έστω ότι ο R είναι ένας δακτύλιος και I, J δύο ιδεώδη του. Να αποδειχθούν οι ισομορφισμοί:

$$(I+J)\,/\,(I\cap J) \cong ((I+J)\,/I) \times ((I+J)\,/J) \cong (J/\,(I\cap J)) \times (I/\,(I\cap J))\,.$$

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Να διατυπωθεί το *λήμμα τού Zorn* και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι κάθε ιδεώδες $I \subsetneqq R$ ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R (με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο) περιέχεται σε κάποιο μεγιστοτικό ιδεώδες τού R.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Έστω $m \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\}$ ένας ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Να αποδειχθεί ότι για την ακεραία περιοχή

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \left\{ a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subsetneqq \mathbb{C}$$

ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι ναιτεριανή περιοχή.

(ii) Το 2 είναι δεν είναι πρώτο στοιχείο τής $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

(iii) Εάν είτε $m \equiv 1(\operatorname{mod} 4)$ είτε $m \leq -3$, τότε το 2 είναι ανάγωγο στοιχείο τής $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

(iv) Εάν είτε $m \equiv 1(\operatorname{mod} 4)$ είτε $m \leq -3$, τότε η $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ δεν είναι ούτε Π.Κ.Ι. ούτε περιοχή με μκδ.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> (i) Να προσδιορισθούν επακριβώς όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα τού $\mathbb{R}[t]$.

(ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα αναγωγιμότητας τού Eisenstein.*

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα βάσεως τού Hilbert.*

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ -b\sqrt{5} & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

αποτελεί έναν μεταθετικό υποδακτύλιο τού $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ με μοναδιαίο και ότι το

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & (3y+x)\sqrt{5} \\ -(3y+x)\sqrt{5} & x \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$

είναι ένα ιδεώδες τού R. Εν συνεχεία, διαπιστώνοντας ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in I,$$

να αποδειχθεί ότι το I δεν είναι κύριο ιδεώδες.

ΘΕΜΑ 7ο Εάν $\langle m \rangle$ και $\langle n \rangle$ είναι δυο ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων παραγόμενα από τους $m, n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\langle m \rangle \cap \langle n \rangle = \langle \text{εκπ}(m,n) \rangle$,

(ii) $\langle m \rangle + \langle n \rangle = \langle \text{μκδ}(m,n) \rangle$,

(iii) $\langle m \rangle \langle n \rangle = \langle mn \rangle$,

(iv) $\langle m \rangle : \langle n \rangle = \left\langle \frac{m}{\text{μκδ}(m,n)} \right\rangle$.

ΘΕΜΑ 8ο Εάν $m \in \{-1, -2, 2, 3\}$, να αποδειχθεί ότι ο $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι ευκλείδεια περιοχή με την

$$\boldsymbol{\delta}\,(z) := |N(z)| = |z\overline{z}|\,, \quad \forall z \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}] \smallsetminus \{0\},$$

ως ευκλείδεια στάθμη της.

ΘΕΜΑ 9ο Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω

$$I_p := \left\{ f(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \in \mathbb{Z}[t] \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \text{ και } p \mid a_0 \right\}.$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το I_p είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[t]$.

(ii) $I_p = \langle t, p \rangle$.

(iii) Το I_p δεν είναι κύριο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[t]$.

(iv) Το I_p είναι μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[t]$.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Έστω $a \in \mathbb{Z}$. Να αποδειχθεί ότι ένα πολυώνυμο $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[t]$ εάν και μόνον εάν το $f(t+a)$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[t]$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το $f(t) = t^4 + 1$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Z}[t]$.

(iii) Εάν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι το *p-οστό κυκλοτομικό πολυώνυμο*

$$\Phi_p(t) := \frac{t^p - 1}{t - 1} = t^{p-1} + t^{p-2} + \cdots + t + 1$$

είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Q}[t]$.

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!