Πανεπιστήμιο Κρήτης **Θεωρία Δακτυλίων και Modules (Μ 222)**

Εαρινό Εξάμηνο 2004, **Εξεταστές: Δ. Νταής (θέματα 1-3)**
Εξεταστική Σεπτεμβρίου **και Μ. Λυδάκης (θέματα 4-6)**

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί λεπτομερώς το *πρώτο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων*.

(ii) Έστω ότι τα I και J είναι ιδεώδη ενός δακτυλίου R. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(α) Το σύνολα $I \cap J$ και $I + J := \{ a + b \mid a \in I,\ b \in J \}$ είναι ιδεώδη τού R.

(β) Η απεικόνιση $f : I \longrightarrow (I + J)/J,\quad f(a) := a + J,\ \forall a \in I$, είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων και

$$(I + J)/J \cong I/(I \cap J).$$

(γ) Η απεικόνιση $g : I + J \longrightarrow (I + J)/I \times (I + J)/J,\quad g(x) := (x + I, x + J),\ \forall x \in I + J$, είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων και

$$(I + J)/I \times (I + J)/J \cong (I + J)/(I \cap J) \cong J/(I \cap J) \times I/(I \cap J).$$

(δ) Ο ομομορφισμός δακτυλίων $h : R \longrightarrow R/I \times R/J,\quad h(r) := (r + I, r + J),\ \forall r \in R,$ δεν είναι κατ' ανάγκην και επιμορφισμός όταν $I + J \subsetneqq R$. (Για την επαλήθευση τού ισχυρισμού αρκεί η παράθεση καταλλήλου παραδείγματος.)

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> (i) Ως γνωστόν, ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι Π.Κ.Ι., οπότε κάθε ιδεώδες του είναι κύριο. Έστω I το ακόλουθο (μη τετριμμένο) ιδεώδες τού $\mathbb{Z}$:

$$I := \left\langle \left\{ m^3 - m \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \right\rangle.$$

Να προσδιορισθεί ο *μονοσημάντως ορισμένος* θετικός ακέραιος n για τον οποίο ισχύει $I = \langle n \rangle$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \left\{ a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subsetneqq \mathbb{C},$$

$m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, είναι ναιτεριανός δακτύλιος (= δακτύλιος τής Noether).

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Έστω R το σύνολο

$$R := \{0\} \cup \left\{ \frac{a}{2^n} \;\middle|\; a \text{ περιττός ακέραιος και } n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι το R είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q}$ (ως προς τις συνήθεις πράξεις).

(ii) Να αποδειχθεί ότι το R είναι ακεραία περιοχή.

(iii) Να προσδιορισθεί η πολλαπλασιαστική ομάδα $R^\times$ των αντιστρεψίμων στοιχείων τού R.

(iv) Να εξετασθεί για καθένα των στοιχείων 2 $(= \frac{1}{2^{-1}})$ και 6 $(= \frac{3}{2^{-1}})$ τού R το κατά πόσον είναι ή δεν είναι ανάγωγο εντός τού R.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> Έστω $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{Z}[x]$.

(i) Να αποδείξετε κατ' ευθείαν από τους ορισμούς ότι, εάν το $f(x)$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Z}[x]$, τότε το 1 είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των a, b, c, d.

(ii) Να αποδείξετε ότι, εάν το $f(x)$ είναι πρωταρχικό στον $\mathbb{Z}[x]$, τότε κάθε παράγοντας τού $f(x)$ είναι επίσης πρωταρχικός στον $\mathbb{Z}[x]$.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω $\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών αριθμών και έστω R ο υποδακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ τού $\mathbb{C}$. Κάθε στοιχείο τού R γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή $r = a + b\sqrt{-3}$, με $a, b \in \mathbb{Z}$ (όπου $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$ και $i := \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$). Για $r = a + b\sqrt{-3}$, όπως παραπάνω, έστω $N(r) := a^2 + 3b^2$.

(i) Να αποδείξετε ότι ένα στοιχείο r τού R είναι αντιστρέψιμο στον R εάν και μόνον εάν $N(r) = 1$.

(ii) Να αποδείξετε ότι το 2 είναι ανάγωγο στον R.

ΘΕΜΑ 6ο (i) Κάθε ακέραιος τού Gauss γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό τη μορφή $r = m + ni$, με $m, n \in \mathbb{Z}$ (όπου $i := \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$). Για $r = m + ni$, όπως παραπάνω, έστω $N(r) := m^2 + n^2$.

Θεωρήστε τούς ακεραίους τού Gauss $a = -3 + 8i$, $b = 1 + 2i$. Να βρείτε ακεραίους τού Gauss q και r με

$$a = bq + r \quad \text{και} \quad N(r) < N(b).$$

(ii) Να χρησιμοποιήσετε τον Ευκλείδειο αλγόριθμο για να γράψετε έναν μέγιστο κοινό διαιρέτη των $90, 37$ υπό τη μορφή $90s + 37t$ ($s, t \in \mathbb{Z}$).

- **Να απαντηθούν το πολύ 5 θέματα από τα 1-6.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει δύο μονάδες.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως βιβλία και σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστά.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους των εξεταστών).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!