Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Δακτυλίων και Modules (M 222)**

Τελική Εξέταση, Εαρινό Εξάμηνο 2004 **Θέματα Δημητρίου Νταή**

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> (i) Εάν τα R και S είναι δυο δακτύλιοι πεπερασμένης χαρακτηριστικής, να προσδιορισθεί η χαρακτηριστική χαρ$(R \times S)$ τού δακτυλίου $R \times S$ συναρτήσει των $m :=$ χαρ(R) και $n :=$ χαρ(S).

(ii) Εάν ένας τουλάχιστον εκ των δακτυλίων R, S έχει χαρακτηριστική ίση με το μηδέν, να αποδειχθεί οτι και ο $R \times S$ έχει χαρακτηριστική ίση με το μηδέν.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2\,a^3 - 50\,a^2 + 883\,a - 26 = 0$ δεν διαθέτει καμία ακεραία λύση a. (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί «εις άτοπον απαγωγή», λαμβανομένων υπ' όψιν των ιδιοτήτων τού επιμορφισμού δακτυλίων $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3,\ f(a) := [a]_3\,, \forall a \in \mathbb{Z}$.)

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> (i) Να προσδιορισθεί επακριβώς η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων τού δακτυλίου $\mathbf{Mat}_{n\times n}(R)$ των $n \times n$ πινάκων, οι εγγραφές των οποίων είναι ειλημμένες από έναν μεταθετικό, μη τετριμμένο 1-δακτύλιο R, συναρτήσει τού R.

(ii) Εάν ο R είναι διαιρετικός δακτύλιος, να αποδειχθεί ότι ο $\mathbf{Mat}_{n\times n}(R)$ είναι ένας απλός δακτύλιος.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> (i) Να προσδιορισθούν όλα τα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ για οιονδήποτε φυσικό αριθμό $m \geq 2$. Πόσα είναι αυτά (συναρτήσει των $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$) εάν υποτεθεί ότι η ανάλυση τού m ως γινομένου διακεκριμένων πρώτων αριθμών $p_1, \ldots, p_k$ είναι η $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$;

(ii) Να προσδιορισθούν όλα τα μεγιστοτικά ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ και, εν συνεχεία, να υπολογισθεί η τομή τους.

(iii) Να προσδιορισθούν όλα τα πρώτα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος είναι ακεραία περιοχή εάν και μόνον εάν το τετριμμένο ιδεώδες του είναι πρώτο.

(ii) Έστω R ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος στον οποίο κάθε ιδεώδες $I \subsetneqq R$ είναι πρώτο. Να αποδειχθεί πως ο R είναι σώμα.

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> Για οιονδήποτε πρώτο αριθμό p ορίζουμε το σύνολο

$$\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{a}{b},\ \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})\,,\ \text{με μκδ}\,(a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b \right\}.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ είναι τοπικός υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q}$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ είναι Π.Κ.Ι., και μάλιστα ότι όλα τα μη τετριμμένα ιδεώδη του είναι τα μέλη τής αλυσίδας

$$\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \supsetneqq p\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \supsetneqq p^2\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \supsetneqq \cdots \supsetneqq p^n\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \supsetneqq p^{n+1}\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \supsetneqq \cdots$$

(Υπόδειξη: Κάθε μη μηδενικό στοιχείο r τού $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ γράφεται υπό τη μορφή $r = p^n \frac{a}{b}$ για κάποιο *μονοσημάντως ορισμένο* $n =: n_r \in \mathbb{N}$, ούτως ώστε $p \nmid a$ και $p \nmid b$. Εάν το I είναι ένα μη τετριμμένο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$,να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως το *ελάχιστο* στοιχείο τού συνόλου $A_I := \{ m \in \mathbb{N} \mid \exists r \in I : n_r = m \}$.)

(iii) Είναι ο $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ ισόμορφος τού $\mathbb{Z}_p$; (Απαιτείται πλήρης δικαιολόγηση τής απαντήσεως.)

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Να αποδειχθεί ότι η ακεραία περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := \left\{ a + b\sqrt{-2} \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subsetneqq \mathbb{C}$ είναι ευκλειδεία περιοχή με την απεικόνιση

$$\boldsymbol{\delta} : \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0,\ \ \boldsymbol{\delta}(z) := N(z) = z\bar{z},\ \ \forall z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \smallsetminus \{0\},$$

ως ευκλειδεία στάθμη της.

ΘΕΜΑ 8ο (i) Είναι το στοιχείο 2 τού $\mathbb{Z}_{10}$ ανάγωγο στον $\mathbb{Z}_{10}$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε στοιχείο b τού $\mathbb{Z}_{10}$, εάν το 2 διαιρεί το $5b$ στον $\mathbb{Z}_{10}$, τότε το 2 διαιρεί το b στον $\mathbb{Z}_{10}$.

ΘΕΜΑ 9ο Έστω R ακέραια περιοχή και τα a, b στοιχεία τού R. Να αποδείξετε κατ' ευθείαν από τους ορισμούς ότι οι κατωτέρω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Οι κοινοί διαιρέτες των a, b είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού R.

(2) Το 1 είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των a, b.

ΘΕΜΑ 10ο Έστω $R = \mathbb{Z}[x]$. Έστω I το ιδεώδες όλων των πολυωνύμων τού R με άρτιο σταθερό όρο. Ισοδυνάμως,

$$I = \{2n + xf(x) : n \in \mathbb{Z},\ \ f(x) \in R\}.$$

Να αποδείξετε ότι το I δεν είναι κύριο.

ΘΕΜΑ 11ο Να αποδείξετε ότι το 2 δεν είναι πρώτο στοιχείο τού υποδακτυλίου

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \left\{ a + b\sqrt{-3} \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

τού σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

ΘΕΜΑ 12ο Έστω $S = \mathbb{Z}[x]$ και έστω $R = S[y]$. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$x^3y^3 + xy^2 + \left(x^2+1\right)y + x^4$$

είναι ανάγωγο στον R.

- **Να απαντηθούν το πολύ 5 θέματα από τα 1-7 και το πολύ 5 θέματα από τα 8-12.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει μία μονάδα.**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως βιβλία και σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστά.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους των εξεταστών).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!