Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Δακτυλίων και Modules (Μ 222)**

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2010 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα ισομορφισμών δακτυλίων* και να παρατεθεί η απόδειξη ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε ακεραία περιοχή, η οποία διαθέτει μόνον έναν πεπερασμένο αριθμό ιδεωδών, είναι σώμα.

(ii) Να αποδειχθεί ότι κάθε ευκλείδεια περιοχή είναι Π.Κ.Ι.

ΘΕΜΑ 3ο Έστω m ένας ακέραιος αριθμός στερούμενος τετραγώνων. Να αποδειχθεί ότι η τετραγωνική αριθμητική περιοχή

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \left\{ a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{C},$$

είναι ναιτεριανή περιοχή.

ΘΕΜΑ 4ο Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί ότι ένα $q \in R \smallsetminus \left(R^{\times} \cup \{0_R\}\right)$ είναι ανάγωγο στοιχείο τής R εάν και μόνον εάν το κύριο ιδεώδες $\langle q \rangle$ είναι ένα μεγιστικό στοιχείο τού συνόλου όλων των γνησίων μη τετριμμένων κυρίων ιδεωδών τής R (ως προς τον συνήθη συνολοθεωρητικό εγκλεισμό).

ΘΕΜΑ 5ο Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Η R είναι Π.Μ.Π.

(ii) Η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση και κάθε στοιχείο $q \in R \smallsetminus \left(R^{\times} \cup \{0\}\right)$ είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι ανάγωγο.

(iii) Κάθε $a \in R \smallsetminus \left(R^{\times} \cup \{0\}\right)$ διαθέτει σύντροφο παριστώμενο ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων στοιχείων τής R.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και το I ένα ιδεώδες του, ορίζουμε το σύνολο

$$\mathrm{Rad}(I) := \{a \in R \mid a^m \in I \text{ για κάποιον θετικό ακέραιο } m\}$$

ως *το ριζικό τού* I. Εάν τα I, J συμβολίζουν ιδεώδη τού R, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Το $\mathrm{Rad}(I)$ είναι ένα ιδεώδες τού R και $I \subseteq \mathrm{Rad}(I)$.

(ii) $\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(I)) = \mathrm{Rad}(I)$,

(iii) $\mathrm{Rad}(I) + \mathrm{Rad}(J) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(I) + \mathrm{Rad}(J)) = \mathrm{Rad}(I + J)$.

ΘΕΜΑ 7ο (i) Να αποδειχθεί ότι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο είναι ακεραία περιοχή εάν και μόνον εάν το τετριμμένο ιδεώδες του είναι πρώτο.

(ii) Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο στον οποίο κάθε ιδεώδες $I \subsetneqq R$ είναι πρώτο. Να αποδειχθεί ότι ο R είναι σώμα.

(iii) Να αποδειχθεί ότι σε κάθε στρεβλό σώμα K ισχύει η ισότητα

$$aba = a - \left(a^{-1} + \left(b^{-1} - a\right)^{-1}\right)^{-1},$$

για οιαδήποτε $a, b \in K \smallsetminus \{0\}$ με $a \neq b^{-1}$.

ΘΕΜΑ 8ο Να αποδειχθεί ότι $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \ncong \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ και $\mathbb{Z}[\mathsf{X}] \ncong \mathbb{Q}[\mathsf{X}]$.

ΘΕΜΑ 9ο Να αποδειχθεί ότι τα στοιχεία 6 και $2(1+\sqrt{-5})$ τής τετραγωνικής αριθμητικής περιοχής $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ δεν διαθέτουν μέγιστο κοινό διαιρέτη.

ΘΕΜΑ 10ο Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων τού Gauss είναι Π.Κ.Ι.

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες**.
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!