Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Δακτυλίων και Modules (Μ 222)**

Εξέταση Ιουνίου 2010 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να διατυπωθεί το *λήμμα τού Zorn* και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι κάθε γνήσιο ιδεώδες I ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες τού R.

ΘΕΜΑ 2ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα ισομορφισμών δακτυλίων* και να παρατεθεί η απόδειξη ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα βάσεως τού Hilbert*.

ΘΕΜΑ 4ο (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε ακεραία περιοχή, η οποία διαθέτει μόνον έναν πεπερασμένο αριθμό ιδεωδών, είναι σώμα.

(ii) Να αποδειχθεί ότι κάθε ευκλείδεια περιοχή είναι Π.Κ.Ι.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Η R είναι Π.Μ.Π.

(ii) Η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση και κάθε στοιχείο $q \in R \smallsetminus \left(R^{\times} \cup \{0\}\right)$ είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι ανάγωγο.

(iii) Κάθε $a \in R \smallsetminus \left(R^{\times} \cup \{0\}\right)$ διαθέτει σύντροφο παριστώμενο ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων στοιχείων τής R.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν μεταθετικοί δακτύλιοι R με μοναδιαίο στοιχείο και $\left|R^{\times}\right| = 5$.

[*Σημείωση*: Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη πολλαπλασιαστική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e_G. Από τη Θεωρία Ομάδων είναι γνωστά τα ακόλουθα:

(i) Εάν ένα στοιχείο $g \in G$ έχει τάξη $\mathrm{ord}(g) =: n$, τότε για $m \in \mathbb{Z}$ ισχύει $g^m = e_G \Leftrightarrow n \mid m$.

(ii) Για κάθε στοιχείο $g \in G$ έχουμε: $\mathrm{ord}(g) \mid |G|$.

(iii) Εάν $|G| = p$, όπου p κάποιος πρώτος αριθμός, τότε η $(G, \cdot)$ είναι κυκλική.

Υπόδειξη: Να γίνει χρήση «εις άτοπον απαγωγής» και κατάλληλη εφαρμογή των (i), (ii) και (iii) για την $(R^{\times}, \cdot)$.]

ΘΕΜΑ 7ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

$$\text{(i)} \quad \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\left\langle 7, 4-\sqrt{-5}\right\rangle \cong \mathbb{Z}_7, \qquad \text{(ii)} \quad \mathbb{Z}[\mathsf{X}] \ncong \mathbb{Q}[\mathsf{X}].$$

ΘΕΜΑ 8ο Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και έστω $I_n := \langle n, \mathsf{X}\rangle$ το ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ το παραγόμενο από τα n και X.

(α) Να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Το I_n είναι κύριο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$.

(ii) $n \in \{0, \pm 1\}$.

(β) Για $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Το I_n είναι μεγιστικό ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$.

(ii) Το I_n είναι πρώτο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$.

(iii) Ο n είναι πρώτος αριθμός.

ΘΕΜΑ 9ο Να αποδειχθεί ότι στην τετραγωνική αριθμητική περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ ισχύουν τα εξής:

(i) Τα στοιχεία $2, 5, 2-\sqrt{-6}$ είναι ανάγωγα αλλά δεν είναι πρώτα.

(ii) $1 \in \text{ΜΚΔ}_{\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]}(5, 2+\sqrt{-6})$, ενώ $1 \notin \langle 5, 2+\sqrt{-6} \rangle$.

(iii) $\text{ΜΚΔ}_{\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]}(10, 4+2\sqrt{-6}) = \varnothing$.

(iv) Το στοιχείο 10 μπορεί να γραφεί ως $10 = p_1 p_2 = q_1 q_2$, όπου τα p_1, p_2, q_1, q_2 είναι (διακεκριμένα) ανάγωγα στοιχεία τής $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ με $p_i \underset{\text{συν.}}{\not\sim} q_j$ για οιαδήποτε $i, j \in \{1, 2\}$.

[*Σημείωση*: Από το (iii) (ή, εναλλακτικώς, από το (iv)) έπεται ότι η $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ δεν είναι Π.Μ.Π.!]

ΘΕΜΑ 10ο (α) Δίδονται τα εξής ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Q}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2]$:

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & \langle \mathsf{X}_1^2 \rangle, & \text{(iv)} & \langle \mathsf{X}_1^2 - 1 \rangle, \\
\text{(ii)} & \langle \mathsf{X}_1 - 2, \mathsf{X}_2 - 3 \rangle, & \text{(v)} & \langle \mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 \rangle, \\
\text{(iii)} & \langle \mathsf{X}_1^2 + 1 \rangle, & \text{(vi)} & \langle \mathsf{X}_1 \mathsf{X}_2 \rangle.
\end{array}$$

Ποια εξ αυτών είναι πρώτα και ποια μεγιστικά;

(β) Δίδονται τα εξής στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_2[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3]$:

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & f(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3) := \mathsf{X}_1^2 + \mathsf{X}_2^2 + \mathsf{X}_3^2, \\
\text{(ii)} & g(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3) := \mathsf{X}_1\mathsf{X}_2 + \mathsf{X}_2\mathsf{X}_3 + \mathsf{X}_3\mathsf{X}_1.
\end{array}$$

Είναι τα πολυώνυμα αυτά ανάγωγα;

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες**.
- **Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξετάσεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες**.
- **Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διενεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!