Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Μιγαδική Ανάλυση (Μ 211)**

Εξέταση Ιουλίου 2007 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Έστω U ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ έχει μιγαδική παράγωγο $f'(z_0)$ στο z_0 εάν και μόνον εάν οι $\mathrm{Re}(f)$ και $\mathrm{Im}(f)$ έχουν διαφορικό στο z_0 και -ταυτοχρόνως- ισχύουν οι «εξισώσεις των Cauchy και Riemann».

ΘΕΜΑ 2ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα τού Goursat*.

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθεί *το θεμελιώδες θεώρημα τής Άλγεβρας* και να δοθεί (τουλάχιστον) μία απόδειξη αυτού.

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα επεκτάσεως τού Riemann*.

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα των Casorati και Weierstrass*.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο (i) Για ποιους $z \in \mathbb{C}$ είναι συγκλίνουσα η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n};$$

(ii) Να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\left| \int_{C(0;3)} \frac{e^{2z}}{z^3+1} dz \right| < \frac{\pi e^6}{4}.$$

(iii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{C(0;4)} \frac{e^z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2} dz.$$

(iv) Εάν $k \in \mathbb{N}$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{C(0;1)} z^k e^{\frac{2}{z}} dz.$$

ΘΕΜΑ 7ο Έστω $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ ένα πολυώνυμο βαθμού $\deg(P(z)) = 3$ με τις θέσεις μηδενισμού του διαφορετικές ανά δύο και ευρισκόμενες στον κλειστό δίσκο $\overline{D(0;1)}$. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{1}{P(z)} dz$ όταν $\gamma(t) := re^{it}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, όπου $r > 1$.

ΘΕΜΑ 8ο Εάν η f είναι μια ακεραία συνάρτηση με $\left|f^{(2)}(z)\right| \leq |z|^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι

$$f(z) = a + bz + cz^4,$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|c| \leq \frac{1}{12}$.

ΘΕΜΑ 9ο Έστω $f \in \mathcal{O}(D(0;2))$. Εάν

$$f(x)^4 - 2f(x)^2x^2 + x^4 = 0,\ \forall x \in (0,1),$$

και

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)z^2}{z-1} dz = 1,$$

όπου $\gamma(t) := re^{it},\ \forall t \in [0, 2\pi], 1 < r < 2$, να αποδειχθεί ότι $f(z) = z,\ \forall z \in D(0;2)$.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Να προσδιορισθεί το πλήθος των θέσεων μηδενισμού (συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων τους) τής συναρτήσεως $f(z) = 3z^4 - 7z + 2$ εντός τής δακτυλιακής περιοχής $D(0; 1, \frac{3}{2})$.

(ii) Να προσδιορισθεί ο ελάχιστος φυσικός αριθμός k για τον οποίο ισχύει $Z(P) \subset D(0;k)$, όπου

$$Z(P) := \{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\},$$

και $P(z) := z^7 - 5z^3 + 7 \in \mathbb{C}[z]$.

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες. (Καθένα των υποερωτημάτων τού θέματος 6 αξιολογείται βαθμολογικώς με μισή μονάδα. Καθένα των υποερωτημάτων τού θέματος 10 αξιολογείται βαθμολογικώς με μία μονάδα.)**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις και τα βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!