**Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών** **Γραμμική Άλγεβρα ΙΙΙ (Μ 2211)**

**Χειμερινό Εξάμηνο 2011-2012, Εξέταση Ιανουαρίου** **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

# ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ 1ο** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα των Cayley και Hamilton*.

**ΘΕΜΑ 2ο** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *κριτήριο τριγωνικοποιησιμότητας* ενός ενδομορφισμού ενός μη τετριμμένου διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διαστάσεως.

**ΘΕΜΑ 3ο** Έστω $K$ τυχόν σώμα και έστω $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι ένας άνω τριγωνικός πίνακας $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ είναι *μηδενοδύναμος* εάν και μόνον εάν είναι αυστηρώς άνω τριγωνικός.

**ΘΕΜΑ 4ο** (i) Εάν $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι ένας μοναδιακός χώρος (δηλαδή ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο), να αποδειχθεί η ανισοϊσότητα των Cauchy και Schwarz:

$$\left|\left\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \right\rangle\right| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \left\|\mathbf{v}'\right\|, \ \forall (\mathbf{v}, \mathbf{v}') \in V \times V.$$

Πότε ισχύει αυτή ως ισότητα;

(ii) Εάν $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι ένας ευκλείδειος χώρος (δηλαδή ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο) διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$, όπου $m \leq n$, να αποδειχθεί η ανισοϊσότητα τού Hadamard:

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \leq \prod_{i=1}^{m} \|\mathbf{v}_i\|.$$

Πότε ισχύει αυτή ως ισότητα;

**ΘΕΜΑ 5ο** Έστω $K$ ένα σώμα και έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας $K$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως με εσωτερικό γινόμενο. Να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Riesz*, ήτοι ότι η απεικόνιση

$$\Theta_V : V \longrightarrow V^\star := \mathrm{Hom}_K(V, K), \ \mathbf{v} \longmapsto \Theta_V(\mathbf{v}) := g_{\mathbf{v}},$$

όπου $g_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) := \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$, $\forall \mathbf{w} \in V$, είναι *αμφιρριπτική*.

# ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**ΘΕΜΑ 6ο** (i) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Να αποδειχθεί ότι για οιουσδήποτε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$\det((\mathbf{A} - a\mathbf{I}_n)^2 + b^2\mathbf{I}_n) = \det\left(\chi_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right),$$

όπου $\chi_{\mathbf{A}}(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}]$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού $\mathbf{A}$.

(ii) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ η ακολουθία πραγματικών αριθμών, οι όροι τής οποίας ικανοποιούν τις συνθήκες

$$a_0 = 2, \ a_1 = 8 + \sqrt{7}, \ a_n = \sqrt{3}a_{n-1} + 5a_{n-2}, \ n \geq 2.$$

Κατόπιν κατάλληλης συσχετίσεως τού πίνακα $\mathbf{U}_n := \binom{a_n}{a_{n-1}}$ με κάποια δύναμη τού πίνακα

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

να προσδιορισθούν επακριβώς όλοι οι όροι $a_n$ τής εν λόγω ακολουθίας.

**ΘΕΜΑ 7ο** Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

είναι τριγωνικοποιήσιμος και να προσδιορισθεί ένας $\mathbf{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$, ώστε ο $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ να είναι άνω τριγωνικός.

**ΘΕΜΑ 8ο** Να προσδιορισθεί η $\nu$-οστή δύναμη $\mathbf{A}^{\nu}$ τού πίνακα

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. [*Υπόδειξη*. Να προσδιορισθεί εν πρώτοις η διευθετημένη μορφή Jordan τού $\mathbf{A}$.]

**ΘΕΜΑ 9ο** (i) Επί τού τρισδιάστατου $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου

$$\mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 2} := \{\, \varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}] \,|\, \deg(\varphi(\mathsf{X})) \leq 2\}$$

ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 2} \ni (\varphi(\mathsf{X}), \psi(\mathsf{X})) \longmapsto \langle \varphi(\mathsf{X}), \psi(\mathsf{X}) \rangle := \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)dt \in \mathbb{R}.$$

Να προσδιορισθεί επακριβώς (μέσω τής μεθόδου των Gram και Schmidt) η ορθοκανονική βάση τού $\mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 2}$ που κατασκευάζεται εκκινώντας από τη συνήθη βάση του $\mathcal{B} := \{1, \mathsf{X}, \mathsf{X}^2\}$.

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \ni (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \longmapsto \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle := \mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*) \in \mathbb{C},$$

όπου $\mathbf{B}^* := (\overline{\mathbf{B}})^{\intercal}$, αποτελεί ένα εσωτερικό γινόμενο (δηλαδή μια ερμιτιανή, θετικώς ορισμένη ημίολη μορφή) επί τού $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ και ότι η συνήθης βάση

$$\mathfrak{E} := \{\, \mathbf{E}_{ij} \,|\, 1 \leq i, j \leq n\} \quad \left(\mathbf{E}_{ij} := (\delta_{\mu i}\delta_{\nu j})_{1\leq \mu,\nu \leq n}\,,\ \forall\, (i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}\right)$$

τού $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ είναι ορθοκανονική ως προς αυτό το $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

**ΘΕΜΑ 10ο** Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας ευκλείδειος χώρος (δηλαδή ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο) και έστω $U$ ένας γραμμικός υπόχωρος αυτού διαστάσεως $n \in \mathbb{N}$. Εάν $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση τού $U$ και $f : V \longrightarrow V$ η απεικόνιση η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$f(\mathbf{v}) := 2\left(\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{u}_i\right) - \mathbf{v},\ \forall \mathbf{v} \in V,$$

(i) να αποδειχθεί ότι $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$,

(ii) να αποδειχθεί ότι $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}') \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle\,,\ \forall (\mathbf{v}, \mathbf{v}') \in V \times V$, και

(iii) να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία τής $f$ στην περίπτωση όπου $V = \mathbb{R}^3$,

$$U = \mathrm{Lin}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}),\ \ \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1^{[3]},\ \ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2^{[3]},$$

και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

---

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**

- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λάβει 2 μονάδες. (Τα υποερωτήματα των θεμάτων 4, 6, 9 και 10 είναι βαθμολογικώς ισοβαρή).**

- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως σημειώσεις και βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**

- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**

- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**

- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

--------------------------------------------------

# ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!