**Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών** **Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (Μ 1212)**

**Εξέταση Σεπτεμβρίου 2011** **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

# ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ 1ο** Έστω $K$ ένα σώμα και έστω $V$ ένας $K$-διανυσματικός χώρος. Να αποδειχθεί ότι ένα μη κενό υποσύνολο $\mathcal{A} \subseteq V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε για κάποιον $i \in \{1, ..., n\}$ το $\mathbf{v}_i$ να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_j$, $j \in \{1, ..., n\} \smallsetminus \{i\}$.

**ΘΕΜΑ 2ο** Έστω ότι το $K$ είναι ένα σώμα και ότι οι $U_1, U_2$ είναι δυο γραμμικοί υπόχωροι ενός $K$-διανυσματικού χώρου $V$. Να αποδειχθεί ότι οι διαστάσεις των $U_1 \cap U_2$, $U_1$, $U_2$ και $U_1 + U_2$ συσχετίζονται μέσω τού ακολούθου τύπου:

$$\dim_K(U_1 + U_2) + \dim_K(U_1 \cap U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2).$$

(Να θεωρηθεί ως γνωστό το ότι κάθε γραμμικός υπόχωρος ενός $K$-διανυσματικού χώρου διαθέτει ένα συμπλήρωμα εντός αυτού.)

**ΘΕΜΑ 3ο** Έστω ότι οι $V, W$ είναι $K$-διανυσματικοί χώροι ($K$ τυχόν σώμα) με τον $V$ μη τετριμμένο και ότι το $\mathcal{B} \subseteq V$ είναι μια βάση τού $V$. Να αποδειχθεί ότι για οιαδήποτε απεικόνιση $\theta : \mathcal{B} \longrightarrow W$ υφίσταται ακριβώς ένας ομομορφισμός $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ με $f|_{\mathcal{B}} = \theta$.

**ΘΕΜΑ 4ο** Να διατυπωθεί το *θεώρημα μεταφοράς ομομορφισμού σε επίπεδο πηλικοχώρων* και να αποδειχθεί μέσω αυτού το 3ο *θεώρημα ισομορφισμών* ($K$-διανυσματικών χώρων, όπου $K$ τυχόν σώμα).

**ΘΕΜΑ 5ο** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα των Cayley και Hamilton* (για τετραγωνικούς πίνακες).

# ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**ΘΕΜΑ 6ο** Έστω $K$ ένα σώμα και έστω $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $\varphi_0(\mathsf{X}), \varphi_1(\mathsf{X}), \ldots, \varphi_n(\mathsf{X}) \in K[\mathsf{X}]_{\leq n}$ με $\deg(\varphi_i(\mathsf{X})) = i$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, τότε το σύνολο $\{\varphi_0(\mathsf{X}), \varphi_1(\mathsf{X}), \ldots, \varphi_n(\mathsf{X})\}$ αποτελεί μια βάση τού $K$-διανυσματικού χώρου $K[\mathsf{X}]_{\leq n}$.

(ii) Εάν $a \in K$, τότε το $U_a := \{\psi(\mathsf{X}) \in K[\mathsf{X}]_{\leq n} \mid \psi(a) = 0_K\}$ είναι ένας γνήσιος γραμμικός υπόχωρος τού $K[\mathsf{X}]_{\leq n}$.

(iii) Εάν $a \in K$ και $\psi_0(\mathsf{X}), \psi_1(\mathsf{X}), \ldots, \psi_n(\mathsf{X}) \in K[\mathsf{X}]_{\leq n}$ με $\psi_i(a) = 0_K$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, τότε το σύνολο $\{\psi_0(\mathsf{X}), \psi_1(\mathsf{X}), \ldots, \psi_n(\mathsf{X})\}$ είναι ένα γραμμικώς εξαρτημένο υποσύνολο τού $K[\mathsf{X}]_{\leq n}$.

(iv) Εάν $a \in K$ και $b \in K \smallsetminus \{0_K\}$, τότε υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα πολυώνυμα

$$\varphi_0(\mathsf{X}), \varphi_1(\mathsf{X}), \ldots, \varphi_n(\mathsf{X}) \in K[\mathsf{X}]_{\leq n} : \varphi_i(a) = b, \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

**ΘΕΜΑ 7ο** Δίδονται οι ομομομορφισμοί $f : \mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\mathsf{X}) \longmapsto f(\varphi(\mathsf{X})) := \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx$, και

$$h : \mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \varphi(\mathsf{X}) \longmapsto h(\varphi(\mathsf{X})) := (\varphi(-1), \varphi(0), \varphi(1)),$$

όπου $\mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 3} := \{\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}] \mid \deg(\varphi(\mathsf{X})) \leq 3\}$.

(i) Να προσδιορισθούν οι πίνακες παραστάσεως $\mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}'}(f), \mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(h)$ των $f$ και $h$, όπου

$$\mathcal{B} := \left(1, \mathsf{X}, \mathsf{X}^2, \mathsf{X}^3\right), \ \mathcal{E}' := \{1\}, \ \mathcal{E} := ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)).$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Ker}(h) \subsetneqq \mathrm{Ker}(f)$.

(iii) Να δοθεί ο τύπος ορισμού τής μοναδικής γραμμικής μορφής $g \in \left(\mathbb{R}^3\right)^\star$ για την οποία ισχύει $g \circ h = f$.

**ΘΕΜΑ 8ο** Έστω $V$ ένας τρισδιάστατος $\mathbb{Z}_p$-διανυσματικός χώρος, όπου $p$ κάποιος πρώτος αριθμός, και έστω $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p}(V)$ με πίνακα παραστάσεως

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} [2]_p & [2]_p & [1]_p \\ [1]_p & [3]_p & [1]_p \\ [1]_p & [2]_p & [2]_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_p)$$

ως προς κάποια διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}$ τού $V$. Για ποιες τιμές τού $p$ είναι ο $f$ αυτομορφισμός τού $V$;

**ΘΕΜΑ 9ο** Έστω $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ ένας ενδομορφισμός με πίνακα παραστάσεως

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

ως προς κάποια διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}$ τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$.

(i) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιόχωροι τού $f$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι ο $f$ είναι διαγωνιοποιήσιμος υπεράνω τού $\mathbb{R}$ και να προσδιορισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο αυτού.

(iii) Να αποδειχθεί ότι $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ και να προσδιορισθεί ο $f^{-1}$.

**ΘΕΜΑ 10ο** Για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ορίζεται ο πίνακας

$$\mathbf{A}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}).$$

Π.χ.,

$$\mathbf{A}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

(i) Να προσδιορισθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού $\mathbf{A}_n$.

(ii) Για ποιες τιμές τού $n$ είναι ο $\mathbf{A}_n$ αντιστρέψιμος;

(iii) Για ποιες τιμές τού $n$ είναι ο $\mathbf{A}_n$ διαγωνιοποιήσιμος υπεράνω τού $\mathbb{C}$;

(iv) Για ποιες τιμές τού $n$ είναι ο $\mathbf{A}_n$ διαγωνιοποιήσιμος υπεράνω τού $\mathbb{R}$;

---

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη. Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες. (Τα υποερωτήματα των θεμάτων 6, 7, 9 και 10 είναι βαθμολογικώς ισοβαρή).**

- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως σημειώσεις και βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**

---

# ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!