Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ (Μ 1212)**

Εαρινό Εξάμηνο 2011, Εξέταση Ιουνίου **Εξεταστής: Δημήτριος Ντατής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Έστω K ένα σώμα και έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος. Εάν $\varnothing \neq \mathcal{B} \subseteq V$, να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση τού V.

(ii) Τα στοιχεία τού $\mathcal{B}$ συγκροτούν ένα ελαχιστικό σύστημα γεννητόρων τού V, δηλαδή $\mathrm{Lin}(\mathcal{B}) = V$ και για κάθε $\mathcal{C} \subsetneqq \mathcal{B}$ έχουμε $\mathrm{Lin}(\mathcal{C}) \subsetneqq V$.

(iii) Το $\mathcal{B}$ είναι ένα μεγιστικό γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού V, δηλαδή κάθε υποσύνολο $\mathcal{A}$ τού V με $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{A}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

(iv) Κάθε $\mathbf{v} \in V$ γράφεται *κατά τρόπο μοναδικό* ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού $\mathcal{B}$.

ΘΕΜΑ 2ο Έστω ότι οι V, W είναι K-διανυσματικοί χώροι (K τυχόν σώμα) με τον V μη τετριμμένο και ότι το $\mathcal{B} \subseteq V$ είναι μια βάση τού V. Να αποδειχθεί ότι για οιαδήποτε απεικόνιση $\theta : \mathcal{B} \longrightarrow W$ υφίσταται ακριβώς ένας ομομορφισμός $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ με $f|_{\mathcal{B}} = \theta$.

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθεί το *θεώρημα μεταφοράς ομομορφισμού σε επίπεδο πηλικοχώρων* και να αποδειχθεί μέσω αυτού το 2ο *θεώρημα ισομορφισμών* (K-διανυσματικών χώρων, όπου K τυχόν σώμα).

ΘΕΜΑ 4ο Έστω K ένα σώμα. Εάν οι V, W είναι K-διανυσματικοί χώροι πεπ. διαστάσεως και $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, να αποδειχθεί ότι $\mathrm{rank}(f^\top) = \mathrm{rank}(f)$.

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα των Cayley και Hamilton* (για τετραγωνικούς πίνακες).

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο (i) Δίδονται οι γραμμικοί υπόχωροι

$$U_1 := \mathrm{Lin}(\{(1,0,1,2),(1,1,0,3)\}),\ U_2 := \mathrm{Lin}(\{(1,-1,1,1),(4,0,1,1)\}$$

τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$. Είναι αληθές ότι $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$;

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$U := \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\},\ \ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

είναι ένας γραμμικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ και να προσδιορισθεί μια βάση του.

ΘΕΜΑ 7ο Έστω K ένα σώμα.

(i) Εάν οι V, W είναι K-διανυσματικοί χώροι, $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ και Z ένας γραμμικός υπόχωρος τού W, να αποδειχθούν τα εξής:

(α) $\dim_K(f^{-1}(Z)) = \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) + \dim_K(Z \cap \mathrm{Im}(f))$.

(β) Εάν αμφότεροι οι V, W έχουν πεπερασμένη διάσταση, τότε

$$\mathrm{codim}_K(f^{-1}(Z); V) = \mathrm{codim}_K(Z; W) - \mathrm{codim}_K(Z + \mathrm{Im}(f); W).$$

(ii) Εάν οι U, U' είναι γραμμικοί υπόχωροι ενός K-διανυσματικού χώρου V, να αποδειχθεί ότι

$$(U + U')/(U \cap U') \cong \left((U + U')/U\right) \times \left((U + U')/U'\right).$$

ΘΕΜΑ 8ο Δίδονται οι ομομομορφισμοί $f : \mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi(\mathsf{X}) \longmapsto f(\varphi(\mathsf{X})) := \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx$, και

$$h : \mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi(\mathsf{X}) \longmapsto h(\varphi(\mathsf{X})) := (\varphi(-1), \varphi(0), \varphi(1)),$$

όπου $\mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 3} := \{\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{R}[\mathsf{X}] \,|\, \deg(\varphi(\mathsf{X})) \leq 3\}$.

(i) Να προσδιορισθούν οι πίνακες παραστάσεως $\mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}'}(f), \mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(h)$ των f και h, όπου

$$\mathcal{B} := \left(1, \mathsf{X}, \mathsf{X}^2, \mathsf{X}^3\right),\ \mathcal{E}' := \{1\},\ \mathcal{E} := ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)).$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Ker}(h) \subsetneqq \mathrm{Ker}(f)$.

(iii) Να δοθεί ο τύπος ορισμού τής μοναδικής γραμμικής μορφής $g \in \left(\mathbb{R}^3\right)^{\star}$ για την οποία ισχύει $g \circ h = f$.

ΘΕΜΑ 9ο (i) Έστω K ένα σώμα. Δίδεται ένας κάτω τριγωνικός πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0_K & 0_K \\ a_{21} & a_{22} & 0_K \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(K)$$

για τον οποίο ισχύει $a_{11} \neq a_{22} = a_{33}$. Πότε είναι ο $\mathbf{A}$ διαγωνιοποιήσιμος υπεράνω τού K;

(ii) Πότε είναι ένας πίνακας $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ τριγωνικοποιήσιμος υπεράνω τού $\mathbb{R}$;

ΘΕΜΑ 10ο Έστω n ένας φυσικός αριθμός ≥ 2 και έστω $\Delta_n := \det(\mathbf{A}_n)$ η ορίζουσα τού πίνακα

$$\mathbf{A}_n := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q}).$$

Να προσδιορισθεί (επακριβώς) η τιμή τής Δ_n. [*Υπόδειξη.* Εάν $\mathbf{R}_n := \binom{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$, τότε για τον προσδιορισμό τής τιμής τής Δ_n είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η διαγωνιοποιησιμότητα τού πίνακα $\mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ για τον οποίο ισχύει $\mathbf{R}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}_{n-1}$.]

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες. (Τα υποερωτήματα των θεμάτων 6, 7, 8 και 9 είναι βαθμολογικώς ισοβαρή).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως σημειώσεις και βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!