Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθ. **Άλγεβρα Ι (ΜΕΜ 221)**

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17, Εξέταση Ιανουαρίου **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ διαθέτει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη.

(ii) Με τη βοήθεια τού (i) και τής «εις άτοπον απαγωγής» να αποδειχθεί ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι ένα *απειροσύνολο*.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Έστω ότι H, K, L είναι υποομάδες μιας ομάδας $(G, \cdot)$.

(i) Εάν $K \sqsubseteq H$, να αποδειχθεί ότι $|G : K| = |G : H|\ |H : K|$.

(ii) Να αποδειχθεί (μέσω κατάλληλης εφαρμογής τού (i)) ότι $|G : K \cap L| = |G : K|\ |G : L|$.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεμελιώδες θεώρημα περί πηλικοομάδων*.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί ο λεγόμενος *νόμος τής διαγραφής* για δακτυλίους.

(ii) Να αποδειχθεί (μέσω τού (i)) ότι κάθε πεπερασμένος μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, ο οποίος δεν διαθέτει ούτε αριστερούς ούτε δεξιούς μηδενοδιαιρέτες, είναι διαιρετικός.

(iii) Να αποδειχθεί ότι για κάθε μη τετριμμένο δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο ισχύουν οι εγκλειστικές σχέσεις: $\mathrm{Nil}(R) \smallsetminus \{0_R\} \subseteq \mathrm{Zdv}(R) \subseteq R \smallsetminus R^{\times}$.

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> Έστω K ένα σώμα. Να αποδειχθεί ο τύπος που εκφράζει τον *κανόνα* (τής i-οστής επίτυπης παραγωγίσεως τού γινομένου δυο πολυωνύμων $\varphi(\mathsf{X}), \psi(\mathsf{X}) \in K[\mathsf{X}]$) *τού Leibniz* (με τη βοήθεια των βασικών ιδιοτήτων τής επίτυπης παραγωγίσεως). Εν συνεχεία, να αποδειχθεί μέσω αυτού ο σχετικός *τύπος τού Taylor* (για πολυώνυμα $\varphi(\mathsf{X}) \in K[\mathsf{X}] \smallsetminus \{0_{K[\mathsf{X}]}\}$ όταν είτε $\text{χαρ}(K) = 0$ είτε $\text{χαρ}(K) > \deg(\varphi(\mathsf{X}))$).

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> (i) Έστω p ένας πρώτος αριθμός, για τον οποίο υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{Z}$ με $p \mid n^2+3$ και $p \mid (n+1)^2+3$. Να αποδειχθεί ότι κατ' ανάγκην ισχύει $p = 13$ και ότι οι υπάρχουν απειροπληθείς ακέραιοι n ικανοποιούντες τις ανωτέρω συνθήκες.

(ii) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x, y, τέτοιοι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$x^2 - 3y^2 = 989.$$

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Έστω $G := \langle a, b \rangle$ η υποομάδα τής $\mathfrak{S}_8$ η παραγόμενη από τα στοιχεία

$$a := [1\ 2\ 3\ 4] \circ [5\ 6\ 7\ 8] \quad \text{και} \quad b := [1\ 5\ 3\ 7] \circ [2\ 8\ 4\ 6].$$

Να αποδειχθεί ότι $|G| = 8$ και ότι η G είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathbf{Q}$ των τετρανίων.

<u>ΘΕΜΑ 8ο</u> Εάν $n \in \mathbb{N}$, ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και ο R ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο χαρακτηριστικής p^n, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $x \in R$ είναι ένα μηδενοδύναμο στοιχείο, να αποδειχθεί ότι το $1_R + x$ είναι αντιστρέψιμο.

(ii) Εάν $r \in R$, τότε το $1_R - r$ είναι μηδενοδύναμο εάν και μόνον εάν το r είναι αντιστρέψιμο και η τάξη τού r εντός τής $R^{\times}$ ισούται με μία δύναμη τού p. [*Υπόδειξη*. Να δειχθεί εν πρώτοις (μέσω μαθηματικής επαγωγής) ότι $(a \pm b)^{(p^n)^\nu} = a^{(p^n)^\nu} \pm b^{(p^n)^\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και για οιαδήποτε $(a, b) \in R \times R$ με $ab = ba$, και να ακολουθήσει διαχωρισμός περιπτώσεων για κατάλληλα a, b.]

(iii) Εάν $\mathrm{Nil}(R) = \{0_R\}$ και εάν $a \in R^{\times}$ είναι ένα στοιχείο πεπερασμένης τάξεως, τότε $\text{μκδ}(p, \mathrm{ord}(a)) = 1$.

ΘΕΜΑ 9ο (i) Να προσδιορισθούν επακριβώς (ήτοι μέσω ενός «κλειστού τύπου») οι θέσεις μηδενισμού τού

$$\mathsf{X}^2 - \xi \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$$

(όπου $\xi = \xi_1 + i\xi_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$) συναρτήσει τού πραγματικού μέρους $\xi_1 = \mathrm{Re}(\xi)$, τού φανταστικού μέρους $\xi_2 = \mathrm{Im}(\xi)$ και τού μέτρου $r := |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ τού ξ, καθώς και τού

$$\mathrm{sign}(\xi_2) := \begin{cases} 1, & \text{όταν } \xi_2 \geq 0, \\ -1, & \text{όταν } \xi_2 < 0. \end{cases}$$

(ii) Έστω $\varphi(\mathsf{X}) := a\mathsf{X}^2 + b\mathsf{X} + c \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$, όπου $a \neq 0$, και έστω $D := b^2 - 4ac$. Να αποδειχθεί ότι

$$\{ z \in \mathbb{C} |\, \varphi(z) = 0 \} = \left\{ \tfrac{-b+w}{2a}, \tfrac{-b-w}{2a} \right\},$$

όπου w είναι ένα στοιχείο τού συνόλου $\{ \zeta \in \mathbb{C} |\, \zeta^2 - D = 0 \}$.

(iii) Να αποδειχθεί ότι για το τριτοβάθμιο μονικό πολυώνυμο

$$\psi(\mathsf{X}) := \mathsf{X}^3 + (-4 + \sqrt{3} + 5i)\mathsf{X}^2 + (\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 21i)\mathsf{X} - 4\sqrt{2} + 4i \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$$

ισχύει $\{\rho \in \mathbb{Z} : |\rho| \leq 4 \text{ και } \psi(\rho) = 0\} \neq \varnothing$ και να προσδιορισθεί η αποσύνθεσή του σε ανάγωγα πολυώνυμα υπεράνω τού σώματος $\mathbb{C}$.

ΘΕΜΑ 10ο Δοθέντων δυο πολυωνύμων $\varphi_1(\mathsf{X}), \varphi_2(\mathsf{X}) \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$ βαθμού ≥ 1 και των πηλίκων $\varpi_1(\mathsf{X}), \varpi_2(\mathsf{X})$ των διαιρέσεων αυτών δια των $\mathsf{X} - a$ και $\mathsf{X} - b$, αντιστοίχως, όπου $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, να προσδιορισθούν οι συντελεστές τού υπολοίπου $\upsilon(\mathsf{X})$ που αφήνει το γινόμενο $\varphi_1(\mathsf{X})\varphi_2(\mathsf{X})$ διαιρούμενο δια τού $(\mathsf{X} - a)(\mathsf{X} - b)$

(i) συναρτήσει των $a, b, \varphi_1(a), \varphi_2(a), \varphi_1(b), \varphi_2(b)$ και

(ii) συναρτήσει των $a, b, \varphi_1(a), \varpi_2(a), \varphi_2(b), \varpi_1(b)$.

Εν συνεχεία, να προσδιορισθεί αριθμητικώς το $\upsilon(\mathsf{X})$ στην περίπτωση κατά την οποία

$$\varphi_1(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^2 + \left(3 - \sqrt{5} + 3i\right)\mathsf{X} + \left(8 - 3\sqrt{5}\right) + 9i, \ \varphi_2(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^3 - i\mathsf{X}^2 + \mathsf{X} + 7, \ \text{ και } \ a = \sqrt{5} - 3i, \ b = i.$$

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη. (Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.)**
- **Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξετάσεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες.**
- **Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διενεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος.**
- **Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν. Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού). Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, χρήση κινητών τηλεφώνων ή άλλων ηλεκτρονικών συσκευών, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!