Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Αλγεβρική Τοπολογία - Ομολογία (Γ 21)**

Εξέταση Φεβρουαρίου 2008 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος και έστω Y υπόχωρος τού ευκλειδείου τοπολογικού χώρου $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Εάν οι $f, g : X \longrightarrow Y$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις, τέτοιες ώστε οι εικόνες $f(x)$ και $g(x)$ τού x μέσω των f, g να είναι συνδέσιμες μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος κειμένου καθ' ολοκληρίαν *εντός τού Y για κάθε* $x \in X$, να αποδειχθεί (με κάθε λεπτομέρεια) ότι $f \simeq g$.

(ii) Εάν ο X είναι τυχών τοπολογικός χώρος, ο n ένας φυσικός αριθμός ≥ 2 και οι $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ δυο συνεχείς απεικονίσεις, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) \neq -g(x)$, $\forall x \in X$, να αποδειχθεί ότι $f \simeq g$.

(iii) Εάν $X = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ και

$$Y := \mathbb{S}^1 \cup \bigcup_{\kappa=0}^{n-1} \left\{ te^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\kappa}{n}} + 2(1-t)e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\kappa}{n}} \,\middle|\, t \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{C},$$

όπου n ένας φυσικός αριθμός ≥ 1, να αποδειχθεί ότι $X \simeq Y$, παρότι $X \not\approx Y$.

(iv) Εάν το $X := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1, y = 0 \} \cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0, -1 \leq y \leq 1 \}$ είναι το «σχήμα τού σταυρού» (εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία την επαγομένη από εκείνην τού ευκλειδείου επιπέδου $\mathbb{R}^2$) και το $Y := \mathbb{R}^2 \smallsetminus X$ το συμπλήρωμά του, να αποδειχθεί ότι $Y \simeq \mathbb{S}^1$.

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης ομάδα οιασδήποτε δρομοσυνεκτικής τοπολογικής ομάδας είναι αβελιανή.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η μόνη συνεκτική κλειστή επιφάνεια, η οποία φέρει τη δομή μιας τοπολογικής ομάδας, είναι ο δισδιάστατος τόρος $\mathbb{T}^2$. (Πρβλ. 4.4.43, σελ. 295.)

ΘΕΜΑ 3ο Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ και κάθε ακέραιο αριθμό m υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ με $\deg(f) = m$. (*Υπόδειξη*: Για $n = 1, m \in \mathbb{Z}$, η $\mathbb{C} \supset \mathbb{S}^1 \ni z \longmapsto z^m \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ είναι μια συνεχής απεικόνιση βαθμού m. Για $n \geq 2$ υπάρχει η δυνατότητα χρήσεως πλήρους επαγωγής επί τού n.)

ΘΕΜΑ 4ο Εάν για $j = 1, 2$ οι $f_j : \mathbb{S}^{k_j} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ $(n \geq 1)$ είναι τοπολογικές εμφυτεύσεις σφαιρών εντός τής $\mathbb{S}^n$ με $0 \leq k_1, k_2 \leq n-1$, να υπολογισθούν οι ομάδες ομολογίας

$$H_q^{\text{sing}}(\mathbb{S}^n \smallsetminus (f_1(\mathbb{S}^{k_1}) \cup f_2(\mathbb{S}^{k_2})); \mathbb{Z}), q \in \mathbb{Z},$$

υπό την προϋπόθεση ότι η τομή $f_1(\mathbb{S}^{k_1}) \cap f_2(\mathbb{S}^{k_2})$ αποτελείται από ένα και μόνον σημείο.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και έστω n ένας φυσικός αριθμός ≥ 1. Εάν ορισθεί η *μονοσημειακή ένωση*

$$\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n := (\mathbb{S}^n \times \{P_+\}) \cup (\{P_+\} \times \mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

δύο αντιτύπων τής n-διάστατης σφαίρας μέσω τού βορείου πόλου $P_+ := (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$, να υπολογισθούν οι μόδιοι ομολογίας

$$H_q^{\text{sing}}(\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n; R), q \in \mathbb{Z}.$$

ΘΕΜΑ 6ο Να υπολογισθούν οι ακόλουθες ομάδες ομολογίας:

(i) $H_q^{\text{sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n; \mathbb{Z})$, $q \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$,

(ii) $H_q^{\text{sing}}(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^m \times L_{2n-1}(p; q_1, \ldots, q_n); \mathbb{Z}_p)$, $q \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$, όπου p ένας *πρώτος* αριθμός ≥ 2 και οι $q_1, \ldots, q_n$ φυσικοί αριθμοί $\leq p$.

ΘΕΜΑ 7ο Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Ο *αριθμός Lefschetz* $\Lambda(f) \in \mathbb{Z}$ οιασδήποτε κυτταρικής απεικονίσεως $f : |K| \longrightarrow |K|$ μπορεί να ορισθεί ως εξής:

$$\Lambda(f) := \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{trace}(H_q^{\text{simpl}}(f) : H_q^{\text{simpl}}(|K|; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_q^{\text{simpl}}(|K|; \mathbb{Q})).$$

Σημειωτέον ότι για κάθε $q \geq 0$ υπάρχει βάση τού $H_q^{\text{simpl}}(|K|; \mathbb{Q})$, τέτοια ώστε ο αντίστοιχος πίνακας τού ενδομορφισμού $H_q^{\text{simpl}}(f)$ να διαθέτει μόνον *ακέραιες* εγγραφές. Δοθείσας μιας τέτοιας f (και συμβολίζοντας για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ως f^n τη *σύνθεση* τής f με τον εαυτό της n φορές) να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν ο p είναι ένας *πρώτος* αριθμός ≥ 2, τότε

$$\Lambda(f^p) \equiv \Lambda(f) \pmod{p}.$$

(ii) Εάν ο $|K|$ είναι συνεκτικός και η f^n μηδενοομοτοπική για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, τότε η f διαθέτει (τουλάχιστον ένα) σταθερό σημείο.

(iii) Εάν ο $|K|$ είναι συνεκτικός, η f στερείται σταθερών σημείων και $f^p = \mathrm{Id}_{|K|}$ για κάποιον *πρώτο* αριθμό $p \geq 2$, τότε

$$\chi(|K|) \equiv 0 \pmod{p}.$$

- **Να απαντηθούν το πολύ 5 θέματα.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!