Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Εισαγωγή στην Αλγεβρική Γεωμετρία (Α 13)**

Εξέταση Ιουνίου 2008 **Εξεταστής: Δημήτριος Ντα ής**

<u>ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> Έστω $\mathbf{k}$ τυχόν σώμα και έστω n ένας ακέραιος ≥ 3. Να προσδιορισθούν οι ανάγωγες συνιστώσες τού συσχετικού αλγεβρικού συνόλου

$$V = \mathbf{V}(\mathsf{X}_1\mathsf{X}_3, \mathsf{X}_2\mathsf{X}_4, \ldots, \mathsf{X}_{n-2}\mathsf{X}_n) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}.$$

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Εάν το $\mathbf{k}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, να αποδειχθεί ότι το ευθύ άθροισμα $\Gamma(V_1) \oplus \Gamma(V_2)$ των δακτυλίων συντεταγμένων δυο συσχετικών αλγεβρικών συνόλων V_1 και V_2 είναι ισόμορφο με τον δακτύλιο συντεταγμένων $\Gamma(V)$ ενός συσχετικού αλγεβρικού συνόλου V.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Έστω $V = \mathbf{V}(\mathsf{Y}^2 - \mathsf{X}^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ η παραβολή τού Neil. Να προσδιορισθούν τα σύνολα πόλων $\mathrm{Pol}(f)$ και $\mathrm{Pol}\left(f^2\right)$, όπου $f = \frac{\overline{\mathsf{Y}}}{\overline{\mathsf{X}}} \in \mathbf{k}(V)$.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> Έστω $\mathbf{k}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. Να αποδειχθούν διαδοχικώς τα ακόλουθα:

(i) Εάν το $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο και ο $i \in \{0, \ldots, n\}$ ένας δείκτης για τον οποίο ισχύει $\mathsf{X}_i \nmid F$, τότε το F είναι ανάγωγο εάν και μόνον εάν το $F(\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_{i-1}, 1_{\mathbf{k}}, \mathsf{X}_{i+1}, \ldots, \mathsf{X}_n)$ (ήτοι η αποομογενοποίηση τού F ως προς τη μεταβλητή X_i) είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί η άσκηση **Α-1-1**.)

(ii) Εάν τα $F, G \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$ είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού d και $d+1$, αντιστοίχως, τα οποία δεν διαθέτουν μη σταθερούς κοινούς παράγοντες, τότε το $F + G$ είναι ανάγωγο. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί «εις άτοπον απαγωγή».)

(iii) Εάν το σύνολο $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{k})$ των $(n \times n)$-πινάκων (με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbf{k}$) ταυτισθεί με τον συσχετικό χώρο $\mathbb{A}^{n^2}_{\mathbf{k}}$ (με συναρτήσεις συντεταγμένων του τις $(\mathsf{X}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$), τότε η ορίζουσα $\det((\mathsf{X}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}) \in \mathbf{k}[(\mathsf{X}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}]$ αποτελεί ένα ομογενές, ανάγωγο πολυώνυμο και

$$\mathbf{I}(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{k}) \smallsetminus \mathrm{GL}(n, \mathbf{k})) = \left\langle \det((\mathsf{X}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}) \right\rangle.$$

(*Υπόδειξη*: Η αναγωγιμότητα έπεται ύστερα από κατάλληλη χρήση των (i) και (ii).)

(iv) Το σύνολο $\mathrm{GL}(n, \mathbf{k}) \subset \mathbb{A}^{n^2}_{\mathbf{k}}$ είναι ισόμορφο με μια συσχετική ποικιλότητα $W \subset \mathbb{A}^{n^2+1}_{\mathbf{k}}$.

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> Έστω $\mathbf{k}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και έστω n ένας ακέραιος ≥ 2. Ως *σύνολο των ιδιωμάτων* μιας υπερεπιφάνειας $\mathbf{V}_+(F) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ (όπου το F υποτίθεται ότι δεν περιλαμβάνει ανάγωγους παράγοντες υψωμένους σε δυνάμεις ≥ 2) ορίζεται το προβολικό αλγεβρικό σύνολο

$$\mathrm{Sing}\left(\mathbf{V}_+(F)\right) := \mathbf{V}_+\left(F, \frac{\partial}{\partial \mathsf{X}_0}(F), \ldots, \frac{\partial}{\partial \mathsf{X}_n}(F)\right).$$

Να προσδιορισθεί το $\mathrm{Sing}(\mathbf{V}_+(F))$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) $F = \mathsf{X}_0^2\mathsf{X}_1^4 - \mathsf{X}_1^6 - \mathsf{X}_0^4\mathsf{X}_2^2$, όπου $n = 2$, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.

(ii) $F = \mathsf{X}_0^{d-1}\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_1^{d-1}\mathsf{X}_2 + \mathsf{X}_2^{d-1}\mathsf{X}_0$, όπου $n = 2$, $d \geq 3$ και $\chi\alpha\varrho(\mathbf{k}) = p$ με $p \mid d$, $p \neq 3$.

(iii) $F = \sum_{j=0}^{n} \mathsf{X}_j^d$, όπου $d \geq 1$ και $\chi\alpha\varrho(\mathbf{k}) = p$ με $p \nmid d$.

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> Έστω $\mathbf{k}$ ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα με $\chi\alpha\varrho(\mathbf{k}) \neq 2$. Να αποδειχθεί ότι κάθε ανάγωγη τετραγωνική προβολική υπερεπιφάνεια $\mathbf{V}_+(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ είναι ισόμορφη με την προβολική ευθεία $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$.

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Έστω $\mathbf{k}$ ένα απειροπληθές σώμα και έστω $F \in \mathbf{k}[\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_n]$, $n \in \mathbb{N}$, ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $d \geq 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\mathbf{V}_+(F) \neq \varnothing$. Να αποδειχθεί ότι το (κατά Zariski ανοικτό) υποσύνολο

$$U(F) := \{[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \mid F(a_0, \ldots, a_n) \neq 0_{\mathbf{k}}\}$$

τού $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ είναι ισόμορφο με μια συσχετική ποικιλότητα. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως η πρόταση 3.10.7.)

- **Να απαντηθούν το πολύ 5 θέματα.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!