Απαντήσεις των εξετάσεων στη Γραμμική Άλγεβρα I
5 Σεπτεμβρίου, 2008

Θέμα 1. Σωστό ή Λάθος με πλήρη δικαιολόγηση.

Έστω $W_1 = \{(0, a) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(b, 0) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$ και $\emptyset$ το κενό σύνολο. Τότε

1. $W_1 \cup W_2$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

   Απάντηση. Λάθος, διότι $(1, 0), (0, 1) \in W_1 \cup W_2$, αλλά $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2$.

2. $dim_{\mathbb{R}}(W_1 + W_2) = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$

   Απάντηση. Σωστό, διότι $dim_{\mathbb{R}}(W_1 + W_2) = dim_{\mathbb{R}}(W_1) + dim_{\mathbb{R}}(W_2) - dim_{\mathbb{R}}(W_1 \cap W_2) = 1 + 1 - 0 = 2 = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$

3. $dim_{\mathbb{R}}(\emptyset) = 0$.

   Απάντηση. Λάθος, διότι το κενό σύνολο **δεν είναι** διανυσματικός χώρος, άρα δεν έχει νόημα το $dim_{\mathbb{R}}(\emptyset)$. Το μονοσύνολο $\{0_V\}$ είναι διανυσματικός χώρος με διάσταση μηδέν.

Θέμα 2. Να δείξετε ότι το σύνολο λύσεων του παρακάτω γραμμικού συστήματος είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μια βάση του:

$$2x + 3y + z = 0$$
$$5y + 3z = 0$$

Απάντηση. Το σύνολο λύσεων A είναι

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+3y+z = 0,\ 5y+3z = 0\} = \{(x, y, z) : 2x+3y+z = 0,\ 5y+3z = 0\} =$$

$$\{(-\frac{2}{3}y, y, -\frac{5}{3}y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Για το A έχουμε ότι

- $(0, 0, 0) \in A$

- Έστω $(-\frac{2}{3}y_1, y_1, -\frac{5}{3}y_1), (-\frac{2}{3}y_2, y_2, -\frac{5}{3}y_2) \in A$, τότε

$$(-\frac{2}{3}y_1, y_1, -\frac{5}{3}y_1) + (-\frac{2}{3}y_2, y_2, -\frac{5}{3}y_2) = (-\frac{2}{3}(y_1+y_2), (y_1+y_2), -\frac{5}{3}(y_1+y_2)) \in A.$$

- Έστω $(-\frac{2}{3}y, y, -\frac{5}{3}y) \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda(-\frac{2}{3}y, y, -\frac{5}{3}y) = (-\frac{2}{3}\lambda y, \lambda y, -\frac{5}{3}\lambda y) \in A.$$

Άρα το A είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και μια βάση του είναι $(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{5}{3})$.

Θέμα 3. Δίνεται η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με

$$f(x, y, z) = (3x + z, 3y + z).$$

1. Να υπολογίσετε τους υποχώρους $Kerf$ και Imf και τις διαστάσεις τους.

   Απάντηση.

   $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\} = \{(x, x, -3x) : x \in \mathbb{R}\} =< (1, 1, -3) > .$

   $Imf = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(3x+z, 3y+z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} =$
   $\{x(3, 0) + y(0, 3) + z(1, 1) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} =< (3, 0), (0, 3), (1, 1) > .$

   Έχουμε ότι το (1,1,-3) είναι μη μηδέν και γραμμικά ανεξάρτητο, άρα αποτελεί και βάση του $Kerf$. Οπότε η διάσταση του $Kerf$ είναι 1.

   Έχουμε ότι τα (3,0),(0,3),(1,1) παράγουν τον Imf, όμως είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τα (3,0),(0,3) είναι ανεξάρτητα, και άρα

   $$Imf =< (3, 0), (0, 3) >$$

   και άρα έχει διάσταση 2.

2. Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.

   Απάντηση. $Kerf$ δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος, άρα η f δεν είναι 1-1.

3. Να εξετάσετε αν η f είναι επί.

   Απάντηση. Η διάσταση του Imf είναι ίση με τον δεύτερο χώρο $\mathbb{R}^2$. Άρα η f είναι επί.

Θέμα 4. Έστω f_1, f_2, f_3, f_4 τυχαία τέσσερα πολυώνυμα του $\mathbb{R}_3[x]$ που παράγουν τον $\mathbb{R}_3[x]$. Έπεται ότι είναι και βάση του $\mathbb{R}_3[x]$; Να δικαιολογήσετε πλήρως την (είτε θετική είτε αρνητική) απάντησή σας.

Απάντηση. Έχουμε ότι η διάσταση του $\mathbb{R}_3[x]$ είναι 4. Αν τα f_1, f_2, f_3, f_4 είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε το ένα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων τριών, και άρα τα τρία πολυώνυμα είναι αρκετά για να παράγουν τον $\mathbb{R}_3[x]$. Άτοπο, άρα τα f_1, f_2, f_3, f_4 είναι αναγκαστικά γραμμικά ανεξάρτητα. Οπότε πράγματι αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}_3[x]$.

Θέμα 5. Δίνεται η $f : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ με

$$f(p(x)) = p'(x).$$

Να βρείτε τον πίνακα $(f : \bar{a}, \bar{b})$, όπου $\bar{a} = (1, x^4, x^2, x^3, x), \bar{b} = (1, x^2, x, x^3)$ είναι οι διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}_4[x]$ και $\mathbb{R}_3[x]$ αντίστοιχα.

Απάντηση. Υπολογίζουμε την εικόνα των στοιχείων της βάσης $\bar{a}$ και τα γράφουμε ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\bar{b}$. Η σειρά παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Αν την αλλάξουμε, ο πίνακας που θα προκύψει, δεν θα είναι σωστός.

$f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^3$
$f(x^4) = 4x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 4 \cdot x^3$
$f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^3$
$f(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^3$
$f(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^3$
Άρα ο πίνακας που θέλουμε είναι

$$(f : \bar{a}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέμα 6. Δίνεται η $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $\bar{a} = (1, x, x^2)$. Να υπολογίσετε το $f(2x^2 + 5x + 1)$.

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της f.

Απάντηση.
$f(1) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 2$
$f(x) = 3 \cdot 1 - 1 \cdot x + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 3 - x$
$f(x^2) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 4 + x$
Από γραμμικότητα της f έχουμε ότι

$$f(2x^2 + 5x + 1) = f2(x^2) + 5f(x) + f(1) = 25 - 3x.$$

Θέμα 7. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα.

   Απάντηση. Ο πίνακας Α έχει δύο ιδιοτιμές: 1 και -1, με αλγεβρικές πολλαπλότητες $a(1) = 2, a(-1) = 1$. Για την ιδιοτιμή 1 τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$. Για την ιδιοτιμή -1 τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $(-2x, x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$.

2. Να υπολογίσετε τους ιδιόχωρους και τις διαστάσεις τους.

   Απάντηση. Για την ιδιοτιμή 1 ο ιδιόχωρος είναι $< (1, 0, 0) >$ και άρα έχει διάσταση 1. Για την ιδιοτιμή -1 ο ιδιόχωρος είναι $< (-2, 1, 2) >$ και άρα έχει διάσταση 1.

3. Είναι ο Α διαγωνίσιμος; Αν ναι, να γράψετε ποιος είναι ο P. Αν όχι, να αναφέρετε ποιο κριτήριο διαγωνισιμότητας δεν ικανοποιεί.

   Απάντηση. Ο Α δεν είναι διαγωνίσιμος. Ένα από τα κριτήρια είναι επαρκές.

   - $a(1) = 2 \neq \gamma(1) = 1$.
   - $\gamma(1) + \gamma(-1) = 2 \neq 3$.
   - το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $(x-1)^2(x+1)$, διότι $(A-I)(A+I) \neq 0$.

Θέμα 8. Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_2[x]$ με το παρακάτω εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

1. Είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ και ορθοκανονική;

   Απάντηση. Έχομε ότι η κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ είναι η $\{1, x, x^2\}$ και ότι $\langle 1, x\rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \neq 0$. Άρα ήδη έχουμε ότι δεν είναι και ορθοκανονική.

2. Να δείξετε μόνο με χρήση του εσωτερικού γινομένου πως το σύνολο $\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.

   Απάντηση. Ελέγχουμε ότι ανά δύο (διαφορετικά) έχουν εσωτερικό γινόμενο 0. Άρα το σύνολο αυτό είναι ορθογώνιο. Από θεωρία τα στοιχεία του ορθογωνίου συνόλου είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Τα στοιχεία είναι 3, όσο και η διάσταση του $\mathbb{R}_2[x]$. Άρα αποτελούν και μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.