Εύρεση ριζών: μερικές στρατηγικές

1. **Ρητές ρίζες:** Έστω η εξίσωση
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$
Εάν υπάρχουν ρητές ρίζες αυτής της εξίσωσης, θα είναι της μορφής $x = \frac{p}{q}$, με $p|a_0$ και $q|a_n$.

   Για παράδειγμα ας πάρουμε την
$$x^3 + 7x^2 + 41x - 87 = 0.$$
Οι διαιρέτες του a_3 είναι ± 1. Άρα αν υπάρχει ρητή ρίζα της, θα είναι ουσιαστικά ακέραια και θα διαιρεί το $a_0 = 87$. Δοκιμάζουμε όλους τους διαρέτες, $(\pm)$, και διαπιστώνουμε πως έχει ακριβώς μια ρητή ρίζα $x = 3$. Οι άλλες δύο δεν είναι ρητές. Για να τις βρούμε, διαιρούμε το $x^3 + 7x^2 + 41x - 87$ με $x - 3$. Δηλαδή
$$x^3 + 7x^2 + 41x - 87 = (x-3)(x^2 - 4x + 29).$$
Το δεύτερο πολυώνυμο είναι βαθμού 2, άρα με το γνωστό τρόπο βρίσκουμε τις άλλες δύο ρίζες (που τελικά είναι μιγαδικές), δηλαδή τις $x = 2 \pm 5i$.

2. **Πραγματικές ρίζες:** Έστω η εξίσωση
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$
Αν n είναι περιττός τότε σίγουρα υπάρχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

   Για $n = 3$, πρώτα δοκιμάζουμε αν έχει ρητή ρίζα. Αν έχει, τότε βρίσκουμε όλες τις ρίζες με τον τρόπο που περιγράψαμε στο 1. Αλλιώς για να λύσουμε την $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

   Βήμα 1: μετατροπή της $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ σε
$$u^3 + au + b = 0$$
θέτοντας $x = u - \frac{p}{3}$, που δίνει
$$a = q - \frac{p^2}{3},$$

$$b = r - \frac{pq}{3} + \frac{2p^3}{27}.$$

Βήμα 2: υπολογισμός των A και B:

$$A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Βήμα 3: οι λύσεις της $u^3 + au + b = 0$ είναι οι ακόλουθες τρεις:

$$u_1 = A + B,$$
$$u_2 = -\frac{u_1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}(A - B),$$
$$u_3 = -\frac{u_1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}(A - B).$$

Βήμα 4: οι λύσεις της $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ είναι οι ακόλουθες τρεις:

$$x_1 = u_1 - \frac{p}{3},$$
$$x_2 = u_2 - \frac{p}{3},$$
$$x_3 = u_3 - \frac{p}{3}.$$

3. **Πλήθος πραγματικών ριζών:** Αν δεν θέλουμε να βρούμε τις ρίζες, αλλά απλά να διαπιστώσουμε πόσες πραγματικές ρίζες έχει η

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

έχοντας πως οι συντελεστές $p, q, r \in \mathbb{Q}$, κάνουμε τα εξής:

Βήμα 1: μετατροπή της $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ σε $u^3 + au + b = 0$, όπως πριν, δηλαδή θέτουμε $x = u - \frac{p}{3}$, $a = q - \frac{p^2}{3}$, και $b = r - \frac{pq}{3} + \frac{2p^3}{27}$.

Βήμα 2: υπολογισμός της διακρίνουσας $D = -4a^3 - 27b^2$.

Βήμα 3: Η $u^3 + au + b = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα αν και μόνο αν $D < 0$.

Βήμα 4: Μιας και οι ρίζες τις $u^3 + au + b = 0$ δίνουν τις αντίστοιχες ρίζες τις $x^3+px^2+qx+r = 0$, έπεται πως η εξίσωση $x^3+px^2+qx+r = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα αν και μόνο αν $D < 0$.

4. Αν σας φαίνονται αυτοί οι υπολογισμοί δύσκολοι, να ξέρετε τότε πως για πολυώνυμα βαθμού 5 και πάνω δεν υπάρχουν και δεν γίνεται να υπάρξουν αντίστοιχοι τύποι υπολογισμού ριζών, ούτε δύσκολοι, ούτε εύκολοι!!! Χρησιμοποιούνται πλέον άλλες τεχνικές, που εξαρτώνται πάντα από δοσμένη εξίσωση.