

Ασκήσεις για το σπίτι 1

Παράδοση 30-11-2007.

Μετά από την αναφερόμενη μέρα δεν θα βαθμολογούνται οι ασκήσεις.

Άσκηση 1. Να εξετασθεί αν το σύνολο $W = \{(x, y, z) : x > y > z\}$ είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^3 . (1 μον.)

Άσκηση 2. Να εξετασθεί αν το σύνολο των λύσεων του συστήματος
$$2x - 7y - 5z = 0$$
$$x - 2y - 3z = 1$$
είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^3 . (1 μον.)

Άσκηση 3. Για ποιά τιμή του k το διάνυσμα $(1, -2, k)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $(1, 0, -2)$ και $(3, -1, -5)$; (2 μον.)

Άσκηση 4. Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$ και $(0, 0, 1)$ αποτελούν μια βάση του \mathbb{R}^3 . (4 μον.)

Άσκηση 5. Το σύνολο $A = \{x+1, x^2+1, x^2+5\}$ παράγει το $\mathbb{R}_2[x]$; Υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του A που να είναι βάση του $\mathbb{R}_2[x]$; (2 μον.)

Άσκηση 6. Δίνεται ο υπόχωρος $U = \{(x, y, z) : x = 3y\}$ του \mathbb{R}^3 . Να βρεθεί υπόχωρος W ώστε $U + W = \mathbb{R}^3$ και το άθροισμα να είναι ευθύ. (2 μον.)

Άσκηση 7. Δίνεται η απεικόνιση $L(x, y, z) = (2x - 3y, y + 2z, z - y, x + y)$ από \mathbb{R}^3 στο \mathbb{R}^4 .

- 1) Να δείξετε πως είναι γραμμική.
- 2) Να βρεθούν $\text{Ker}L$, $\text{Im}L$ και οι βάσεις τους.
- 3) Εξετάστε αν η L είναι 1-1.
- 4) Εξετάστε αν η L είναι επί. (3 μον.)

Άσκηση 8. Να βρεθεί μια βάση του χώρου πηλίκου $\mathbb{R}_6[x]/\mathbb{R}_3[x]$. (2 μον.)

Άσκηση 9. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L(x, y) = (y + 2x, x + y, x - y)$ από \mathbb{R}^2 στο \mathbb{R}^3 .

Να βρείτε τον πίνακα $A_L(B_1, B_2)$, όπου B_1 κανονική βάση του \mathbb{R}^2 και $B_2 = \{(0, 1, 1), (2, 3, 0), (1, -1, 3)\}$ βάση του \mathbb{R}^3 . (1 μον.)