

Ασκήσεις για το σπίτι 2

Παράδοση 11-01-2008.

Ομάδα Α

Άσκηση 1. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τον $B = A^6 + 2A^4 - A + I$ και τις ιδιοτιμές του B με χρήση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A και των ιδιοτιμών του A .

(1 μον.)

Άσκηση 2. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Να δείξετε ότι για κάθε $k \geq 3$ ισχύει $A^k = A^{k-2} + A^2 - I$.
- Να υπολογίσετε τον A^{2007} .

(2 μον.)

Άσκηση 3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Να εξετάσετε αν ο A τριγωνοποιείται. Αν ναι, να βρείτε τους αντίστοιχους πίνακες U, T , με T να είναι τριγωνικός και $A = UTU^{-1}$.

(1 μον.)

Άσκηση 4. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- Είναι ο A αντιστρέψιμος;
- Να εξετάσετε αν ο A διαγωνοποιείται. Αν ναι, να βρείτε τους αντίστοιχους πίνακες P, Δ , με Δ να είναι διαγώνιος και $A = P\Delta P^{-1}$.

Υπόδειξη: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού, οπότε έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα. Με μελέτη του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ως συνάρτηση, δηλαδή πόσες φορές αλλάζει πρόσημο, να εξετάσετε αν τελικά έχει τρεις ρίζες ή μόνο μία. Αν έχει τρεις τότε διαγωνοποιείται, αλλιώς δεν διαγωνοποιείται.

(2 μον.)

Άσκηση 5. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A , όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

(1 μον.)

Άσκηση 6. Εξετάστε αν ορίζουν οι παρακάτω απεικονίσεις εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^2

- $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 - u_2v_2$
- $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2$

(2 μον.)

Άσκηση 7. Δίνεται η βάση $B = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, -1, 2)\}$ του \mathbb{R}^3 . Να μετατραπεί σε μια ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

(1 μον.)

Άσκηση 8. Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του \mathbb{C}^2 που να είναι κάθετα στο διάνυσμα $(1 - i, 1 + i)$ ως προς το κανονικό γινόμενο του \mathbb{C}^2 .

(1 μον.)

Ομάδα Β
προτεινόμενες ασκήσεις μελέτης
από τις σημειώσεις του κ. Κουρουνιώτη

- 1.5, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11
- όλες του κεφαλαίου 2
- 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12
- 4.3, 4.4
- 5.3, 5.4, 5.5
- όλες του κεφαλαίου 6
- όλες του κεφαλαίου 7.