## Ασκήσεις για τα κεφάλαια 6 και 7

**Άσκηση 1.** Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Να εξετάσετε αν ο $A$ τριγωνοποιείται, πρώτον στο $\mathbb{R}$, δεύτερον στο $\mathbb{C}$.

2) Να εξετάσετε αν ο $A$ διγωνοποιείται, πρώτον στο $\mathbb{R}$, δεύτερον στο $\mathbb{C}$.

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $x^3 + -10x^2 + 41x - 50$. Από όλους τους διαιρέτες του 50 μόνο το 2 μας κάνει. Αφού διαιρέσουμε το $x^3 + -10x^2 + 41x - 50$ με $x - 2$, βρίσκουμε ένα δευτεροβάθμιο, που έχει για ρίζες: $4 \pm 3i$. Άρα

1) ο $A$ δεν τριγωνοποιείται στο $\mathbb{R}$, αλλά τριγωνοποιείται στο $\mathbb{C}$.

2) ο $A$ δεν διγωνοποιείται (αφού ούτε τριγωνοποιείται) στο $\mathbb{R}$, αλλά διγωνοποιείται στο $\mathbb{C}$ διότι οι ρίζες είναι όλες διαφορετικές.

**Άσκηση 2.** Δίνεται ο πίνακας $A$ διάστασης 3 και με ελάχιστο πολυώνυμο $(x - 1)$. Ποιο (ή ποια πιθανά) είναι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο·

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι αναγκαστικά $(x - 1)^3$, διότι το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό έχουν ίδιες ρίζες.

**Άσκηση 3.** Δίνεται ο πίνακας $A$ διάστασης 3 και με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(x - 2)x^2$. Ποιο (ή ποια πιθανά) είναι το ελάχιστο του πολυώνυμο·

**Λύση.** Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι ένα από τα παρακάτω:
$(x - 2)x$,
$(x - 2)x^2$.

**Άσκηση 4** (7.7)**.**

**Λύση. (α′)** Θα δείξουμε ότι η δοσμένη συνάρτηση ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

1) $\langle u + v, w\rangle = 4(u_1 + v_1)w_1 + 9(u_2 + v_2)w_2 = 4u_1w_1 + 9u_2w_2 + 4v_1w_1 + 9v_2w_2 = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

2) $\langle au, w\rangle = 4au_1w_1 + 9au_2w_2 = a(4u_1w_1 + 9u_2w_2) = a\langle u, w\rangle$.

3)$\langle u, w\rangle = 4u_1w_1 + 9u_2w_2 = 4w_1u_1 + 9w_2u_2 = a\langle w, u\rangle$.

4) $\langle u, u\rangle = 4u_1u_1 + 9u_2u_2 = 4u_1^2 + 9u_2^2 \geq 0$, και είναι 0 αν και μόνο αν $u = 0$.

**(β′)** Για $u = (0, 1)$ έχουμε ότι $\langle u, u\rangle = -1$, άρα δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.