Λύσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 3

Άσκηση 1 (3.6)**.**

Έστω ότι υπάρχει τέτοια L. Τότε λόγω ορισμού του $KerL$ έχουμε ότι $KerL =< (1,1,0,0,0),(0,0,1,1,1) >$. Δηλαδή η διάσταση του $KerL$ είναι 2. Οπότε η διάσταση του ImL είναι 5-2=3. Άτοπο, διότι ο δεύτερος χώρος είναι διάστασης 2, που σημαίνει πως η διάσταση του ImL πρέπει να είναι το πολύ 2. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γραμμική L.

Άσκηση 2 (3.8)**.**

α΄. $L((z_1,w_1)+(z_2,w_2)) = 3(z_1+z_2)-(w_1+w_2) = L(z_1,w_1)+L(z_2,w_2)$,
$L(a(z,w)) = 3(az)-(aw) = aL(z,w)$.
β΄. $KerL = \{(z,3z)|z \in \mathbb{C}\} =< 1,3 >$, ως δ.χ. επί $\mathbb{C}$.
γ΄. Π.χ. ένας τέτοιος υπόχωρος είναι $U =< (0,i) >$. Προσοχή στον έλεγχο της ανεξαρτησίας! Τα λ_1, λ_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, οπότε το σύστημα έχει τέσσερις μεταβλητές και όχι δύο! Δηλαδή γράφουμε

$$(a_1+b_1 i)(1,3)+(a_2+b_2 i)(0,i) = (0,0).$$

Αυτό μας δίνει μοναδική λύση $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, άρα $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.