Λύσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 2

Άσκηση 1 (2.2).

Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ με $\lambda_1\sqrt{2}+\lambda_2\sqrt{3}=0$. Άρα $\lambda_1 = -\lambda_2\sqrt{\frac{3}{2}} = 0$. Αν $\lambda_1 \neq 0$, τότε $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$. Άτοπο, δηλαδή $\lambda_1 = 0$, οπότε και $\lambda_2 = 0$, άρα $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα επί $\mathbb{Q}$.

Άσκηση 2 (2.7).

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε αν τον χώρο $\mathbb{C}^4$ τον βλέπουμε ως διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$. Διότι στη πρώτη περίπτωση ο $\mathbb{C}^4$ είναι διάστασης 8, ενώ στη δεύτερη είναι διάστασης 4.

Στα παρακάτω εννοούμε πως είναι επί του $\mathbb{C}$.
Άρα $U = \{z_1, z_1, z_3, 0 | z_1, z_3 \in \mathbb{C}\} =< (1,1,0,0),(0,0,1,0) >$.
α΄. Για να δείξουμε ότι $U \subseteq W$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της βάσης του U ανήκει στο W. Πράγματι,

$$(1,1,0,0) = (1-i)(1,0,0,0) + (i,1,0,0) + 0(0,i,1,0),$$

$$(0,0,1,0) = (-1)(1,0,0,0) - i(i,1,0,0) + 1(0,i,1,0.)$$

Έτσι $U \subseteq W$.
β΄. Συμπληρώνουμε τη βάση του U με ένα στοιχείο του W ώστε να παραμένουν γραμμικά ανεξάρτητα.
Π.χ. μια τέτοια βάση είναι $< (1,1,0,0),(0,0,1,0),(i,1,0,0) >$.

Άσκηση 3 (2.8).

- Έστω ένας δ.χ. X πεπερασμένης διάστασης. Αν ένας υπόχωρος Y έχει την ίδια διάσταση, τότε η βάση του είναι και βάση του X, άρα $X = Y$.
- Έστω ένας δ.χ. X άπειρης διάστασης. Αν ένας υπόχωρος Y έχει και αυτός άπειρη διάσταση, τότε δεν σημαίνει κατά ανάγκη πως η βάση του είναι και βάση του X. Για παράδειγμα $X = \mathbb{C}[x]$ και $Y = \mathbb{R}[x]$.

Άσκηση 4 (2.9)**.**

$U =< (2,0,0,1),(0,1,1,0) >,$
$V =< (0,1,0,0),(0,0,1,0) >,$
$U + V =< (2,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0) > .$

Άσκηση 5 (2.10)**.**

$$V =< (3,1,0,0,0),(0,0,7,1,0),(0,0,0,0,1) > .$$