Λύσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 1

Άσκηση 1 (1.5).

- Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από $[0,1]$ στο $\mathbb{R}$ με πράξεις κατά σημείο είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Το μηδέν εδώ είναι η σταθερή συνάρτηση $f(1)=0$, για κάθε $x \in [0,1]$.
- Το σύνολο των συναρτήσεων από $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, όπου $f(1)=0$, με πράξεις κατά σημείο είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Το μηδέν εδώ είναι η σταθερή συνάρτηση $f(1)=0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Το σύνολο των συναρτήσεων από $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, όπου $f(1)=1$, με πράξει-ς κατά σημείο δεν είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, διότι το σύνολο αυτό δεν είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση.
- Το σύνολο των συναρτήσεων από $\mathbb{R}$ στο $[0,1]$ με πράξεις κατά σημείο δεν είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, διότι το σύνολο αυτό δεν είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση.

Άσκηση 2 (1.7).

- Το σύνολο των ρητών ακολουθιών με τις παρακάτω πράξεις είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{Q}$. Το μηδέν εδώ είναι η ακολουθία $(0)_{n\in\mathbb{N}}$.

  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

  $q(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (qa_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Εάν περιοριστούμε σε ρητές ακολουθίες που συγκλίνουν στο $\sqrt{2}$, τότε οι πάνω πράξεις δεν κάνουν αυτό το σύνολο διανυσματικό χώρο, διότι δεν είναι κλειστό ως προς πρόσθεση.
- Το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ γίνεται διανυσματικός χώρος με τις εξής πράξεις

  $(a_1 + a_2\sqrt{2}) + (b_1 + b_2\sqrt{2}) = a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\sqrt{2}$,

  $q(a_1 + a_2\sqrt{2}) = qa_1 + qb_2\sqrt{2}$.

  Το μηδέν εδώ είναι το 0.

- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών με πράξεις: πρόσθεση όπως τη ξέρουμε και με πολλαπλασιασμό με έναν ρητό μας κάνει το $\mathbb{R}$ διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{Q}$.

Άσκηση 3 (1.8).

- Το σύνολο $\{(x,y)|2x=3y\}$ το γράφουμε και ως $\{(x,\frac{2}{3}x)|x\in\mathbb{R}\}$. Έτσι εύκολα ελέγχουμε πως είναι γραμμικός υπόχωρος.
- Το σύνολο $A=\{(x,y)|2x+y-1=0\}$ δεν είναι γραμμικός υπόχωρος. Διότι $(0,0)\notin A$.
- Παρομοίως το σύνολο $B=\{(x,y)|x>0, y=3x\}$ δεν είναι γραμμικός υπόχωρος. Διότι $(0,0)\notin B$.

Άσκηση 4 (1.9).

Έστω $x\in U\cap V$, άρα υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$ ώστε

$$\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(-1,0,1)=\mu_1(2,-1,1)+\mu_2(1,0,3).$$

Λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα έχουμε ότι
$\lambda_1=-\mu_1,\lambda_2=-2\mu_1,\mu_2=-\mu_1$. Οπότε $x=\mu_1(2,-1,1)-\mu_1(1,0,3)$, για κάποιο $\mu_1\in\mathbb{R}$. Έτσι

$$U\cap V=\{\mu_1(2,-1,1)-\mu_1(1,0,3),|\mu_1\in\mathbb{R}\}=<(1,-1,-2)>.$$

Άσκηση 5 (1.10).

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε πως εξετάζουμε αυτά τα σύνολα επί του $\mathbb{K}$, οπότε ο πολλαπλασιασμός θα γίνεται με στοιχεία του $\mathbb{K}$. Έτσι, ο βαθμός δεν αλλάζει σε έναν τέτοιο πολλαπλασιασμό. Για τη πρόσθεση είναι γνωστό πως ο βαθμός είναι ο μεγαλύτερος από τους δύο, και επίσης το $0\in P_k$. Άρα είναι P_k είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{K}[x]$. Σε αντίθεση με το σύνολο Q_k, που είναι μεν κλειστό ως προς πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό, αλλά δεν περιέχει το 0. Δηλαδή Q_k δεν είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{K}[x]$, για $k\neq 0$. Για $k=0$, παρατηρούμε ότι πρόκειται για $\mathbb{Q}$, οπότε είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{K}[x]$.