Ασκήσεις για το σπίτι 4
Παράδοση των λύσεων: μέχρι τις 3 μ.μ. της Πέμπτης
16-01-2014

Άσκηση 1 (2 Μον). Έστω l_φ το πλήθος όλων των συμβόλων που εμφανίζονται στον φ. Δείξετε ότι για κάθε τύπο φ στον οποίον δεν εμφανίζεται το σύμβολο $\neg$ ισχύει ότι ο αριθμός l_φ είναι περιττός.

Λύση. Θα το δείξουμε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου.

Βάση: Έστω φ μια προτασιακή μεταβλητή, p, τότε $l_\varphi = 1$. Άρα ισχύει το ζητούμενο για τη προτασιακή μεταβλητή.

Επαγωγικό βήμα:

- Έστω φ της μορφής $\psi \wedge \chi$, όπου το σύμβολο $\neg$ δεν εμφανίζεται στους ψ, χ και ισχύει ότι οι αριθμοί l_ψ, l_χ είναι περιττοί. Έχουμε ότι $l_{\psi\wedge\chi} = l_\psi + l_\chi + 1$, δηλαδή πάλι περιττός.
- Έστω φ της μορφής $\psi \vee \chi$, όπου το σύμβολο $\neg$ δεν εμφανίζεται στους ψ, χ και ισχύει ότι οι αριθμοί l_ψ, l_χ είναι περιττοί. Έχουμε ότι $l_{\psi\vee\chi} = l_\psi + l_\chi + 1$, δηλαδή πάλι περιττός.
- Έστω φ της μορφής $\psi \to \chi$, όπου το σύμβολο $\neg$ δεν εμφανίζεται στους ψ, χ και ισχύει ότι οι αριθμοί l_ψ, l_χ είναι περιττοί. Έχουμε ότι $l_{\psi\to\chi} = l_\psi + l_\chi + 1$, δηλαδή πάλι περιττός.
- Έστω φ της μορφής $\psi \leftrightarrow \chi$, όπου το σύμβολο $\neg$ δεν εμφανίζεται στους ψ, χ και ισχύει ότι οι αριθμοί l_ψ, l_χ είναι περιττοί. Έχουμε ότι $l_{\psi\leftrightarrow\chi} = l_\psi + l_\chi + 1$, δηλαδή πάλι περιττός.

Συνεπώς δείξαμε το ζητούμενο για όλους τους προτασιακούς τύπους στους οποίους δεν εμφανίζεται το σύμβολο $\neg$.

Άσκηση 2 (2 Μον). Θέτουμε φ_0 να είναι ο τύπος $p \to q$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ φ_{k+1} είναι ο τύπος $\varphi_k \to p$. Για ποιες τιμές του k ο τύπος φ_k είναι ταυτολογία;

Λύση.

Έχοντας μελετήσει τον παρακάτω πίνακα, διατυπώνουμε τον εξής ισχυρισμό: Ο τύπος φ_k είναι ταυτολογία αν και μόνο αν $k = 2n$, με $n \geq 1$.

Πίνακας 1:

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	...	φ_{2n}	φ_{2n+1}	φ_{2n+2}	...
1	1	1	1	1	...	1	1	1	...
1	0	0	1	1	...	1	1	1	...
0	1	1	0	1	...	1	0	1	...
0	0	1	0	1	...	1	0	1	...

Πράγματι, για $k = 0, 1$, όπως φαίνεται και στον πίνακα, ο τύπος φ_k είναι δεν ταυτολογία. Με επαγωγή στο n θα δείξουμε ότι φ_{2n} είναι ταυτολογία για όλα τα $n \geq 1$.

Βάση: $n = 1$, ισχύει, όπως φαίνεται και στον πίνακα, ότι ο τύπος φ_2 είναι ταυτολογία.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι το δείξαμε για n. Τότε σύμφωνα με τον πίνακα, κατασκευάζουμε πρώτα τον φ_{2n+1}, και μετά τον $\varphi_{2n+2} = \varphi_{2(n+1)}$ και βλέπουμε πως $\varphi_{2(n+1)}$ είναι ταυτολογία.

Στη συνέχεια δείχνουμε με παρόμοιο τρόπο πως φ_{2n+1} δεν είναι ταυτολογία για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 3 (1 Μον)**.** Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου Γ_1 της προτασιακής λογικής τέτοιου ώστε Γ_1 να είναι αντιφατικό, αλλά για κάθε δύο τύπους φ_1, $\varphi_2 \in \Gamma_1$, το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ είναι συνεπές.

Λύση. Θεωρούμε $\Gamma_1 = \{p,\ p \to q,\ \neg p \vee \neg q\}$. Κάνοντας τον πίνακα αλήθειας για το σύνολο Γ_1, έχουμε ότι τα σύνολα $\{p, p \to q\}$, $\{p, \neg p \vee \neg q\}$ και $\{p \to q, \neg p \vee \neg q\}$ είναι έγκυρα, αλλά όλο το $\{p, p \to q, \neg p \vee \neg q\}$ δεν είναι.

Άσκηση 4 (1 Μον)**.** Δείξετε πως το σύνολο συνδέσμων $\{\wedge, \leftrightarrow, +\}$ είναι πλήρες, όπου $+$ ορίζεται ως εξής:

$$p + q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q).$$

Λύση. Έχουμε ήδη τον σύνδεσμο $\wedge$ στο δοσμένο σύνολο συνδέσμων, οπότε αρκεί να εκφράσουμε τον σύνδεσμο $\neg$. Ένας τρόπος να τον ορίσουμε είναι

$$\neg p \equiv (p + p) \leftrightarrow p.$$

Άρα το σύνολο συνδέσμων $\{\wedge, \leftrightarrow, +\}$ είναι πλήρες.

Άσκηση 5 (1 Μον)**.** Έστω P μονομελές κατηγόρημα, f διθέσια συνάρτηση και c σύμβολο σταθεράς. Βρείτε δομή ώστε

(α) να μην ισχύει η πρόταση $\forall x\Big(P(x) \rightarrow P(f(x,x))\Big)$.

(β) να ισχύει η πρόταση $\forall x(x \neq c \rightarrow f(x,c) \neq x)$.

Λύση. Θεωρούμε τη δομή $\mathcal{A} = \{\mathbb{N}, P, +, 1\}$, όπου

$$P(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x\text{ είναι περιττός’.}$$

Σε αυτήν τη δομή δεν ισχύει η πρόταση $\forall x\Big(P(x) \rightarrow P(f(x,x))\Big)$, διότι για την αποτίμηση $v(x) = 1$, έχουμε ότι η σχέση $P(1)$ αληθεύει, αλλά η $P(1+1)$ όχι.

Στη δομή αυτή ισχύει η πρόταση $\forall x(x \neq c \rightarrow f(x,c) \neq x)$, για τον απλό λόγο πως στους φυσικούς, για όλα τα x αληθεύει $x + 1 \neq x$.

Άσκηση 6 (1 Μον)**.** Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου Γ_2 της κατηγορηματικής λογικής τέτοιου ώστε Γ_2 να είναι αντιφατικό, αλλά για κάθε τρεις τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Gamma_2$, το σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ είναι συνεπές.

Λύση. Θεωρούμε το σύνολο

$$\Gamma_2 = \{\forall x P(x) \lor \forall x Q(x) \lor \forall x R(x),\ \exists x \neg P(x),\ \exists x \neg Q(x),\ \exists x \neg R(x)\}.$$

• Το σύνολο $\{\forall x P(x) \lor \forall x Q(x) \lor \forall x R(x),\ \exists x \neg P(x),\ \exists x \neg Q(x)\}$ είναι ικανοποιήσιμο στη δομή $\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{N}, P, Q, R\}$, όπου

$$P(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x\text{ είναι περιττός’,}$$

$$Q(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x\text{ είναι άρτιος’,}$$

$$R(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x = x\text{’.}$$

• Το σύνολο $\{\forall x P(x) \lor \forall x Q(x) \lor \forall x R(x),\ \exists x \neg Q(x),\ \exists x \neg R(x)\}$ είναι ικανοποιήσιμο στη δομή $\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{N}, P, Q, R\}$, όπου

$$R(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x\text{ είναι περιττός’,}$$

$$Q(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x\text{ είναι άρτιος’,}$$

$$P(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x = x\text{’.}$$

• Το σύνολο $\{\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vee \forall x R(x),\ \exists x \neg P(x),\ \exists x \neg R(x)\}$ είναι ικανοποιήσιμο στη δομή $\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{N}, P, Q, R\}$, όπου

$$R(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x \text{ είναι περιττός’},$$

$$P(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x \text{ είναι άρτιος’},$$

$$Q(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x = x\text{’}.$$

• Το σύνολο $\{\exists x \neg P(x),\ \exists x \neg Q(x),\ \exists x \neg R(x)\}$ είναι ικανοποιήσιμο στη δομή $\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{N}, P, Q, R\}$, όπου

$$R(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x \text{ είναι περιττός’},$$

$$Q(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x \text{ είναι άρτιος’},$$

$$P(x) \text{ ερμηνεύεται ως ‘}x \neq x\text{’}.$$

Αλλά δεν υπάρχει καμία δομή στην οποία να ικανοποιείται το σύνολο Γ_2.

Άσκηση 7 (2 Μον)**.** Γράψτε τύπο της γλώσσας της αριθμητικής του οποίου η σημασία στη δομή $\mathcal{N}$ να είναι

‘x είναι γινόμενο δύο διαδοχικών πρώτων’.

Λύση. Ορίζουμε διαδοχικά τις σχέσεις:

• $P(x)$ ερμηνεύεται ως ‘x είναι πρώτος’ και ορίζεται ως

$$\forall u \forall v[x = u \cdot v \to u = 1 \vee v = 1].$$

• $\Delta(x, y)$ ερμηνεύεται ως ‘x, y είναι διαδοχικοί πρώτοι’ και ορίζεται ως

$$P(x) \wedge P(y) \wedge \neg \exists z[P(z) \wedge x < z \wedge z < y].$$

Άρα η ζητούμενη σχέση είναι

$$\exists u \exists v[x = u \cdot v \wedge \Delta(u, v)].$$