Ασκήσεις για το σπίτι 2

Άσκηση 1 (1 Μον)**.** Άσκηση 34, από το πρώτο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση.

(α΄) Θέτουμε
p : 'ο εξεταστής είναι αυστηρός' και q : 'ο εξεταστής είναι δίκαιος'.
Οπότε το σύνολο που έχουμε να εξετάσουμε είναι

$$\{p \wedge q, \neg p \wedge \neg q\}.$$

Κάνοντας τον πίνακα αλήθειας διαπιστώνουμε πως για καμία αποτίμηση δεν ικανοποιείται το σύνολο αυτό. Δηλαδή δεν είναι συνεπές.

(β΄) Θέτουμε
p : 'ο αριθμός **p** είναι περιττός' και q : 'ο αριθμός **p** διαιρείται με το 2'.
Οπότε το σύνολο που έχουμε να εξετάσουμε είναι

$$\{p \vee q, \neg p \wedge \neg q\}.$$

Κάνοντας τον πίνακα αλήθειας διαπιστώνουμε πως για καμία αποτίμηση δεν ικανοποιείται το σύνολο αυτό. Δηλαδή δεν είναι συνεπές.

(γ΄) Θέτουμε
p : 'οι φιλόσοφοι μελετούν τα μαθηματικά' και q : 'οι φιλόσοφοι τα θεωρούν άχρηστα'. Οπότε το σύνολο που έχουμε να εξετάσουμε είναι

$$\{\neg p \vee q, p \leftrightarrow q\}.$$

Κάνοντας τον πίνακα αλήθειας διαπιστώνουμε πως για παράδειγμα η αποτίμηση $a(p) = a(q) = 1$ ικανοποιεί το σύνολο αυτό. Δηλαδή είναι συνεπές.

Άσκηση 2 (1 Μον)**.** Άσκηση 35, από το πρώτο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. Έστω $\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi$ μια τυπική απόδειξη του φ από το Γ. Τότε

1. φ_1

$\vdots$

n. φ

$n+1$. $\varphi \to \varphi \vee \psi$ (A8)

$n+2$. $\varphi \vee \psi$ $(MP, n, n+1\ )$

$n+3$. $\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$ (A6)

$n+4$. $\psi \vee \varphi$ $(MP, n+2, n+3\ )$

είναι μια τυπική απόδειξη για τους τύπους $\varphi \vee \psi$, $\psi \vee \varphi$.

Άσκηση 3 (1 Μον)**.** Άσκηση 49(α΄), από το δεύτερο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. Όροι: $x, y, z, \mathbb{I}, x \circ y, (x \circ y) \circ \mathbb{I}, y + z, ((x \circ y) \circ \mathbb{I}) \circ x, x \circ \mathbb{I}, y \circ \mathbb{I}$.
Τύποι: $((x \circ y) \circ \mathbb{I}) \circ x = y + z$,
$x = y + z$,
$x \circ \mathbb{I} = y \circ \mathbb{I}$,
$x \circ \mathbb{I} = y \circ \mathbb{I} \to x = y + z$,
$\forall y(((x \circ y) \circ \mathbb{I}) \circ x = y + z)$,
$\exists x \forall y(((x \circ y) \circ \mathbb{I}) \circ x = y + z)$,
$\forall y(x \circ \mathbb{I} = y \circ \mathbb{I} \to x = y + z)$,
$\forall x \forall y(x \circ \mathbb{I} = y \circ \mathbb{I} \to x = y + z)$,
$\exists x \forall y(((x \circ y) \circ \mathbb{I}) \circ x = y + z) \vee \forall x \forall y(x \circ \mathbb{I} = y \circ \mathbb{I} \to x = y + z)$.

Άσκηση 4 (1 Μον)**.** Άσκηση 53, από το δεύτερο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση.

α΄ *i)* $V^*((x_2 \cdot x_1) + S(x_1)) = 7 \cdot 3 + 4 = 25$.

ii) $V^*((x_1 + x_3) \cdot S(S(0)) = (3 + 13) \cdot 2 = 32$.

iii) $V^*((x_1 + x_2) \cdot S(S(0) + S(S(S(0))) \cdot x_2) = (3 + 7) \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 41$.

α′ i) Μετά την εφαρμογή του ορισμού αλήθειας του $Tarski$ έχουμε ότι

$$\mathcal{A} \models (x_1 + x_3) \cdot S(S(0)) \cdot x_2 < (x_2 \cdot x_1) + S(x_1)[V]$$

αν και μόνο αν $32 < 25$. Η τελευταία σχέση δεν ισχύει στους φυσικούς, άρα

$$\mathcal{A} \not\models (x_1 + x_3) \cdot S(S(0)) \cdot x_2 < (x_2 \cdot x_1) + S(x_1)[V].$$

ii) Μετά την εφαρμογή του ορισμού αλήθειας του $Tarski$ έχουμε ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 (x_1 \cdot S(S(0)) + x_2 \cdot S(S(S(0))) = S(S(S(S(0)))) \cdot x_3)[V]$$

αν και μόνο αν για κάθε $a \in \mathbb{N}$ υπάρχει $b \in \mathbb{N}$ ώστε $b = \frac{52-2a}{3}$.

Η τελευταία σχέση δεν ισχύει στους φυσικούς για $a = 1$ για παράδειγμα, άρα

$$\mathcal{A} \not\models \forall x_1 \exists x_2 (x_1 \cdot S(S(0)) + x_2 \cdot S(S(S(0))) = S(S(S(S(0)))) \cdot x_3)[V].$$

iii) Μετά την εφαρμογή του ορισμού αλήθειας του $Tarski$ έχουμε ότι

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 (S(S(S(0))) < x_1) \wedge \forall x_2 (S(S(S(0))) < x_1 \cdot x_3 + S(0))[V]$$

αν και μόνο αν υπάρχει $a \in \mathbb{N}$ ώστε $3 < a$ και $3 < 40$.

Η τελευταία σχέση ισχύει στους φυσικούς για $a = 4$ για παράδειγμα, άρα

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 (S(S(S(0))) < x_1) \wedge \forall x_2 (S(S(S(0))) < x_1 \cdot x_3 + S(0))[V].$$

Άσκηση 5 (1 Μον)**.** Άσκηση 55, από το δεύτερο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. Δίνεται η γλώσσα $\{+, \cdot, \mathbb{O}, <, S\}$. Θεωρούμε για παράδειγμα τη δομή $\mathcal{A}$ με σύμπαν το μονοσύνολο $\{0\}$. Η ερμηνεία των συμβόλων είναι η ακόλουθη: $0 + 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, $\mathbb{O}^{\mathcal{A}} = 0$, $<^{\mathcal{A}} = \{(0, 0)\}$, $S(0) = 0$. Έχουμε ότι

$$\mathcal{A} \models \exists x \forall y (\mathbb{O} < y \wedge y < x).$$

Άσκηση 6 (1 Μον)**.** Άσκηση 56, από το δεύτερο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. Ως πρόταση φ μπορούμε για παράδειγμα να πάρουμε την αρχή ελαχίστου: $\exists x \forall y (x < y \lor x = y)$, η οποία ισχύει στους φυσικούς, αλλά όχι στους ακεραίους.

Ως πρόταση ψ μπορούμε για παράδειγμα να πάρουμε την αρχή της διακριτής διάταξης: $\exists x \exists y (x < y \land \forall z \neg (x < z \land z < y))$, η οποία ισχύει στους ακεραίους, αλλά όχι στους ρητούς.

Άσκηση 7 (1 Μον)**.** Άσκηση 57, από το δεύτερο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση.

α′) $\exists y (x = y + y)$

β′) $\exists y (x = y + y + S(\mathbb{O}))$

γ′) $\exists z (x \cdot z = y) \land \neg (x = 0)$

δ′) $\exists y \exists z [\neg (y = S(\mathbb{O})) \land \neg (z = S(\mathbb{O})) \land x = y \cdot z]$

ε′) $\forall y \forall z \neg [\neg (y = S(\mathbb{O})) \land \neg (z = S(\mathbb{O})) \land x = y \cdot z]$

στ′) $y|x \land z|x \land [\forall w (y|w \land z|w \land w < S(x) \to x = w)]$

ζ′) $x|y \land x|z \land [\forall w (w|y \land w|z \land x < S(w) \to x = w)]$

η′) $\forall y \forall z \exists x [y|x \land z|x \land [\forall w (y|w \land z|w \land w < S(x) \to x = w)]]$

ϑ′) $\forall x \exists y (x = 2 \cdot y \lor x = 2 \cdot y + S(\mathbb{O}))$

ι′) $\forall x \exists y (x < y)$

Άσκηση 8 (1 Μον)**.** Άσκηση 60, από το δεύτερο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. Τύπος που ορίζει δομές με ακριβώς ένα στοιχείο είναι

$$\varphi_1 \equiv \exists x \forall y (x = y).$$

Τύπος που ορίζει δομές με ακριβώς δύο στοιχεία είναι

$$\varphi_2 \equiv \exists x_1 \exists x_2 (\neg (x_1 = x_2) \land \forall y (x_1 = y \lor x_2 = y)).$$

Παρομοίως ο τύπος που ορίζει δομές με ακριβώς k στοιχεία είναι

$$\varphi_k \equiv \exists x_1 ... \exists x_k (\neg (x_1 = x_2) \land ... \land (\neg (x_{k-1} = x_k) \land \forall y (x_1 = y \lor ... \lor x_k = y)).$$

Άσκηση 9 (1 Μον). Άσκηση 64(γ΄), (δ΄), (ε΄), (ϑ΄) και (ιβ΄), από το δεύτερο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση.

γ΄) Δεν είναι λογικά αληθινός ο τύπος, διότι στη δομή με σύμπαν το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$ και με με ερμηνεία του $<$ ως σχέση υποσυνόλου δεν ισχύει ο τύπος. Ικανοποιείται όμως στη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και τη κλασσική διάταξη.

δ΄) Είναι λογικά αληθινός ο τύπος, λόγω του νόμου αντικατάστασης.

ε΄) Δεν είναι λογικά αληθινός ο τύπος, διότι στη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και τη κλασσική διάταξη δεν ισχύει ο τύπος. Ικανοποιείται όμως στη δομή με σύμπαν μονοσύνολο, διότι το στοιχείο του σύμπαντος θα είναι και η ερμηνεία του $\mathbb{I}$, και έτσι δεν θα είναι ποτέ αλήθεια το πρώτο μέρος της συνεπαγωγής.

ϑ΄) Είναι λογικά αληθινός ο τύπος, λόγω του νόμου αντιμετάθεσης ποσοδεικτών.

ιβ΄) Δεν είναι λογικά αληθινός ο τύπος, διότι στη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και με ερμηνεία του $P(x)$ να είναι ΄x είναι μη αρνητικός αριθμός΄ δεν ισχύει ο τύπος. Ικανοποιείται όμως στη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και με ερμηνεία του $P(x)$ να είναι ΄x είναι άρτιος΄.

Άσκηση 10 (1 Μον). Άσκηση 65(α΄), (δ΄), (ε΄) και (ζ΄), από το δεύτερο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση.

α΄) Δεν είναι λογικά αληθινός ο τύπος, διότι στη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και με ερμηνεία του $P(x)$ να είναι ΄x είναι άρτιος΄ και με ερμηνεία του $Q(x)$ να είναι ΄x είναι περιττός δεν ισχύει ο τύπος, εφόσον κάθε φυσικός είναι ή περιττός ή άρτιος. Αλλά δεν είναι ούτε όλοι φυσικοί άρτιοι ούτε όλοι περιττοί.

δ΄) Δεν είναι λογικά αληθινός ο τύπος, διότι στη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και με ερμηνεία του $P(x)$ να είναι ΄x είναι άρτιος΄ και με ερμηνεία του $Q(x)$ να είναι ΄x είναι περιττός δεν ισχύει ο τύπος, εφόσον ικανοποιείται τετριμμένα η ισοδυναμία.

ε′) Δεν είναι λογικά αληθινός ο τύπος, διότι στη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και με ερμηνεία του $P(x)$ να είναι ′x είναι άρτιος′ δεν ισχύει ο τύπος. Εφόσον υπάρχει άρτιος φυσικός, αλλά δεν είναι όλοι άρτιοι οι φυσικοί.

ζ′) Δεν είναι λογικά αληθινός ο τύπος, διότι στη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και με ερμηνεία του $P(x)$ να είναι ′x είναι άρτιος′ δεν ισχύει ο τύπος. Εφόσον υπάρχει αποτίμηση που στέλνει το x στο 2, αλλά αλλά δεν είναι όλοι άρτιοι οι φυσικοί.