Ασκήσεις για το σπίτι 1
Παράδοση των λύσεων: μέχρι τις 3 μ.μ. της Παρασκευής
01-11-2013

Άσκηση 1 (1,5 Μον)**.** Να δείξετε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει $m_\varphi = n_\varphi + 1$, όπου m_φ είναι ο αριθμός εμφανίσεων προτασιακών μεταβλητών και n_φ είναι ο αριθμός εμφανίσεων διθέσιων συνδέσμων στον φ.

Λύση. Πρώτα δείχνουμε για τη προτασιακή μεταβλητή p. Έχουμε ότι $m_p = 1$ και $n_p = 0$. Άρα ισχύει ο ισχυρισμός για τη p.

Έστω ότι δείξαμε για τον τύπο φ, δηλαδή έστω ότι $m_\varphi = n_\varphi + 1$. Επειδή έχουμε πως $m_{\neg\varphi} = m_\varphi$ και $n_{\neg\varphi} = n_\varphi$, δείξαμε πως ισχύει ο ισχυρισμός και για $\neg\varphi$.

Έστω ότι δείξαμε για τους τύπους φ, ψ, δηλαδή έστω ότι $m_\varphi = n_\varphi + 1$ και $m_\psi = n_\psi + 1$. Επειδή έχουμε πως $m_{\varphi\wedge\psi} = m_\varphi + m_\psi$ και $n_{\varphi\wedge\psi} = n_\varphi + n_\psi + 1$, έπεται πως $m_{\varphi\wedge\psi} = m_\varphi + m_\psi = (n_\varphi+1)+(n_\psi+1) = (n_\varphi+1+n_\psi)+1 = n_{\varphi\wedge\psi}+1$. Δηλαδή, δείξαμε πως ισχύει ο ισχυρισμός και για $\varphi \wedge \psi$.

Άσκηση 2 (1 Μον)**.** Να δείξετε ότι $\{p \to (q \to r), q\} \models p \to r$.

Λύση.

Πίνακας 1:

p	q	r	$p \to (q \to r)$	$p \to r$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Στις γραμμές 1, 5 και 6 γίνεται το σύνολο $\{p \to (q \to r), q\}$ αλήθεια, και σε αυτές τις γραμμές βλέπουμε πως ικανοποιείται και ο τύπος $p \to r$. Άρα έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3 (1 Μον)**.** Άσκηση 4, από το πρώτο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. (α΄) Δεν αρκεί. Πρέπει να ξέρουμε τη λογική τιμή του r. Αν $r = 1$, τότε ο τύπος παίρνει λογική τιμή 1, ενώ αν $r = 0$, τότε ο τύπος παίρνει λογική τιμή 0.

(β΄) Αρκεί. Ο τύπος παίρνει λογική τιμή 0.

(γ΄) Αρκεί, διότι έχουμε να εξετάσουμε στην ουσία αν ισχύει $\neg q \leftrightarrow \neg q$, και αυτό είναι πάντα αλήθεια.

(δ΄) Δεν αρκεί. Πρέπει να ξέρουμε τη λογική τιμή του r. Αν $r = 1$, τότε ο τύπος παίρνει λογική τιμή 0, ενώ αν $r = 0$, τότε ο τύπος παίρνει λογική τιμή 1.

Άσκηση 4 (1,5 Μον)**.** Άσκηση 12, από το πρώτο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. (α΄) Το $\{|\}$ είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων διότι μπορούμε να ορίσουμε τα $\neg$ και $\vee$. Πράγματι,

$\neg\varphi \equiv \varphi|\varphi$

Πίνακας 2:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi\|\varphi$
1	0	0
0	1	1

$\varphi \vee \psi \equiv (\varphi|\varphi)|(\psi|\psi)$

Πίνακας 3:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$(\varphi\|\varphi)\|(\psi\|\psi)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

(β΄) Το $\{\downarrow\}$ είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων διότι μπορούμε να ορίσουμε τα $\neg$ και $\vee$. Πράγματι, Πίνακας 4:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \downarrow \varphi$
1	0	0
0	1	1

$\neg\varphi \equiv \varphi \downarrow \varphi$
$\varphi \vee \psi \equiv (\varphi \downarrow \psi) \downarrow (\varphi \downarrow \psi)$

Πίνακας 5:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$(\varphi \downarrow \psi) \downarrow (\varphi \downarrow \psi)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Άσκηση 5 (1 Μον)**.** Άσκηση 18, από το πρώτο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση.

Πίνακας 6:

p	q	$p \to q$	$p \to (p \wedge q)$	$\neg q \to (p \to q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε πως και οι τρεις τύποι είναι λογικά ισοδύναμοι.

Άσκηση 6 (1,5 Μον)**.** Άσκηση 24(α′), (β′), από το πρώτο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. (α') Για την κανονική συζευκτική μορφή εφαρμόζουμε διαδοχικά:
$p \wedge (q \vee (\neg p \wedge r)) \equiv p \wedge (q \vee \neg p) \wedge (q \vee r)) \equiv p \wedge (q \vee \neg p) \wedge (q \vee r)$
Ο τελευταίος τύπος είναι η κανονική συζευκτική μορφή.

Για την κανονική διαζευκτική μορφή εφαρμόζουμε διαδοχικά:
$p \wedge (q \vee (\neg p \wedge r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg p \wedge r)) \equiv (p \wedge q)$
Ο τελευταίος τύπος είναι η κανονική διαζευκτική μορφή.

Σχόλιο: Για την ακρίβεια ο τύπος $p \wedge q$ μπορεί να θεωρηθεί και ως κανονική συζευκτική μορφή και ως κανονική διαζευκτική μορφή του τύπου $p \wedge (q \vee (\neg p \wedge r))$.

(β') Για την κανονική συζευκτική μορφή εφαρμόζουμε διαδοχικά:
$p \leftrightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p)) \equiv p \leftrightarrow (\neg q \vee (\neg q \vee p)) \equiv p \leftrightarrow (\neg q \vee p) \equiv$
$(p \rightarrow (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg q \vee p) \rightarrow p) \equiv (\neg p \vee (\neg q \vee p)) \wedge (\neg(\neg q \vee p) \vee p) \equiv$
$(\neg(\neg q \vee p) \vee p) \equiv (q \wedge \neg p) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (\neg p \vee p) \equiv (q \vee p)$
Ο τελευταίος τύπος είναι η κανονική συζευκτική μορφή.

Για την κανονική διαζευκτική μορφή εφαρμόζουμε διαδοχικά:
$p \leftrightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p)) \equiv p \leftrightarrow (\neg q \vee (\neg q \vee p)) \equiv p \leftrightarrow (\neg q \vee p) \equiv$
$(p \rightarrow (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg q \vee p) \rightarrow p) \equiv (\neg p \vee (\neg q \vee p)) \wedge (\neg(\neg q \vee p) \vee p) \equiv$
$(\neg(\neg q \vee p) \vee p) \equiv (q \wedge \neg p) \vee p$
Ο τελευταίος τύπος είναι η κανονική διαζευκτική μορφή.

Άσκηση 7 (1 Μον)**.** Άσκηση 26, από το πρώτο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. Έστω τυχαία αποτίμηση V. Τότε για όλους τους τύπους $\psi \in \Delta$ έχουμε ότι $V^*(\psi) = 1$ διότι κάθε $\psi \in \Delta$ είναι ταυτολογία. Από την υπόθεση ότι $\Delta \models \varphi$, πρέπει $V^*(\varphi) = 1$. Δηλαδή δείξαμε πως για κάθε αποτίμηση V έχουμε $V^*(\varphi) = 1$. Άρα φ είναι ταυτολογία.

Άσκηση 8 (1,5 Μον)**.** Άσκηση 40, από το πρώτο μέρος των σημειώσεων του Κ. Σκανδάλη.

Λύση.
Για αρχή δείχνουμε ότι $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Πράγματι η τυπική απόδειξη είναι η ακόλουθη:
1. $\varphi \rightarrow \psi$, Υπόθεση
2. $\psi \rightarrow \varphi$, Υπόθεση

3. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi))$, $(A5)$
4. $((\psi \to \varphi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi))$, $1, 3,\ MP$
5. $\varphi \leftrightarrow \psi$, $2, 4,\ MP$

Για το δεύτερο μέρος της άσκησης έχουμε τα εξής:
(1) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash \varphi \to \psi$ από την άμεση εφαρμογή του Α9.
(2) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash \psi \to \varphi$ από την άμεση εφαρμογή των Α7 και Α9.
(3) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ από την τυπική απόδειξη, (1) και (2).
(4) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)$ από το (3) και Θεώρημα Απαγωγής.
(5) $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$ από Α3 και Θεώρημα Απαγωγής.
(6) $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \to \varphi$ από Α4 και Θεώρημα Απαγωγής.
(7) $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ από (5). (6), Α10 και Θεώρημα Απαγωγής.
(8) $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ από τη Παρατήρηση 6 (σελ. 24) στις σημειώσεις του Κ. Σκανδάλη, (4), (7) και Θεώρημα Απαγωγής.