Θεωρία Συνόλων 16/12/2009

4.34) Βρείτε τους πληθάριθμους:

i) $A = \{ \alpha : \alpha = \overset{(\text{άπειρη})}{\text{ακολουθία}} \text{ με τιμές στο } \{0,1,2,\dots,9\} \}$

ii) $B = (\mathbb{R} \to \mathbb{Q})$

Λύση

i) $\Delta := \{ \alpha, \alpha = \overset{\text{άπειρη}}{\text{ακολουθία}} \text{ με ψηφία } 0 \text{ ή } 1 \}$

Ξέρουμε ότι $\Delta =_c \mathbb{R}$ και $\Delta \subseteq A$ άρα $\boxed{\Delta \leq_c A}$ δηλ. $\boxed{\mathbb{R} \leq_c A}$

$A =_c 10^{\mathbb{N}}$ οπότε $A \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και έχουμε

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} := (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_c P(\mathbb{N}) = \mathbb{R}$$

Άρα $\boxed{A \leq_c \mathbb{R}}$ Άρα $\boxed{A =_c \mathbb{R}}$

ii) Καταρχήν $\mathbb{N} =_c \mathbb{Q}$

Άρα $(\mathbb{R} \to \mathbb{Q}) =_c (\mathbb{R} \to \mathbb{N})$

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \leq_c (\mathbb{R} \to \mathbb{N})$$

άρα $\mathbb{R} \leq_c B$

Τι γίνεται με τη σχέση $\boxed{B \leq_c \mathbb{R}}$;

4.29 Να βρεθούν παραδείγματα πληθαρίθμων ώστε

i) $m <_c n \not\to p+m <_c p+n$

<u>Λύση</u> π.χ. $m =_c [0,5) =_c 5$, $n =_c [0,6) =_c 6$, $p = \mathbb{N}$ $\Bigg\}$ $m <_c n$ αλλά $m+p =_c \mathbb{N} =_c n+p$

Δηλ. το ζητούμενο ∎

ii) $m <_c n \not\to p \cdot m <_c p \cdot n$

<u>Λύση</u>

π.χ. $m =_c 5$, $n =_c 6$, $p = \mathbb{N}$ $\Bigg\}$ $p \cdot m = \{(0,n_0),(1,n_1),\dots,(4,n_4) \mid n_i \in \mathbb{N}\}$

$p \cdot m =_c p \cdot n =_c \mathbb{N}$

iii) $m < n \not\to m^p < n^p$

<u>Λύση</u>

ίδια m, n, p (θα είναι ισοπληθικά με το $\mathbb{R}$)

Δηλ $m^p =_c n^p =_c \mathbb{R}$

<u>Ορισμός</u> της διάταξης σε γινόμενο.

$P \cdot Q = \{(x,y) : x \in P, y \in Q\}$

με $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2) \iff$ ή $y_1 <_Q y_2$

ή $(y_1 = y_2)$ και $(x_1 \leq_P x_2)$

Χ.7.10 Αν P, Q καλά διατεταγμένοι χώροι τότε και $P \circ Q$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

Απόδειξη

i) $(x,y) \leq (x,y)$ $\forall x \in P$, $y \in Q$ (αυτοπαθής)

ii) $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)^{(*)}$ και
$(x_2,y_2) \leq (x_1,y_1)^{(**)}$

διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

α) $y_1 < y_2$ τότε δεν ισχύει η (**) → Άτοπο

Άρα αναγκαστικά $\boxed{y_1 = y_2 \text{ και } x_1 \leq_P x_2}$

β) $y_1 = y_2$, $x_1 <_P x_2$ πάλι δεν ισχύει η (**)

Άρα αναγκαστικά $x_1 = x_2$

Άρα ισχύει η αντισυμμετρικότητα

iii) μεταβατικότητα ...

iv) συγκρισιμότητα ...

v) (κάθε μη-κενό υποσύνολο έχει ελάχιστο.)

Έστω $X \subseteq P \circ Q$, $X \neq \emptyset$. Θ.δ.ο. έχει ελάχιστο.

$Y_1 = \{ y \in Q : (x,y) \in X$ για κάποιο $x \in P \}$

$Y_1 \neq \emptyset$ διότι $X \neq \emptyset$. Άρα το Y_1 έχει ελάχιστο $[Y_1 \subseteq Q]$

Έστω y_1 το ελάχιστο του Y_1

$X_1 = \{ x \in P : (x, y_1) \in X \} \subseteq P$

$X_1 \neq \emptyset$ άρα υπάρχει ελαχ. του X_1, έστω x_0

Άρα ισχυρισμός: (x_0, y_1) ελαχ. του X

συνέχεια

Πράγματι, έστω $(x,y)\in X$

τότε ξέρουμε $y_1 \leq y$

$y_1 < y$

$\Rightarrow (x_0,y_1)\leq (x,y)$

$y_1 = y$ τότε αφού $x_0 \leq x$

$\Rightarrow (x_0,y_1)\leq (x,y)$

Άρα η αρχική διάταξη είναι καλή διάταξη.

x.7.8 Νδο $\overset{A}{\mathbb{N}\cdot_0 \{0,1\}} \sim \overset{B}{\mathbb{N} +_0 \mathbb{N}}$

αλλά $\{0,1\}\cdot_0 \mathbb{N} =_0 \mathbb{N}$

(άρα $\mathbb{N}\cdot\{0,1\} \neq_0 \{0,1\}\cdot_0 \mathbb{N}$)

Απόδειξη

$\mathbb{N}\cdot_0 \{0,1\} = \{(n,0),(m,1) : m,n\in\mathbb{N}\}$

$\mathbb{N}+_0 \mathbb{N} = \{(0,n),(1,m) : m,n\in\mathbb{N}\}$

$\pi : A \to B$

$\pi(x,y) = (y,x)$

Πρέπει νδο π είναι 1-1, επί, και σέβεται την διάταξη.

απόδειξη ότι π διατηρεί διάταξη.

Έστω $(x_1,y_1)\leq (x_2,y_2)$

$y_1 < y_2$ ⊛

$y_1 = y_2$, $x_1 \leq x_2$ ⊛⊛

⊛ $\pi(x_1,y_1) = (y_1,x_1)$

$\pi(x_2,y_2) = (y_2,x_2)$

Επειδή $y_1 < y_2 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 1$

Άρα $(y_1,x_1)\leq (y_2,x_2)$

δηλ. $\boxed{\pi(x_1,y_1)\leq \pi(x_2,y_2)}$

⊛⊛ $\pi(x_1,y_1) = (y_1,x_1)$

$\pi(x_2,y_2) = (y_2,x_2)$

Επειδή $y_1 = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2 = 0$ ή $y_1 = y_2 = 1$

Άρα επειδή $x_1 \leq x_2 \Rightarrow (y_1,x_1) \leq_B (y_2,x_2)$

$\Rightarrow \pi(x_1,y_1)\leq \pi(x_2,y_2)$

τέλος απόδειξης

συνεχεια χ7.8

Δευτερο σκέλος

$\{0,1\} \cdot_{\Gamma} \mathbb{N} =_{o} \mathbb{N}$

πληροί τις προϋποθέσεις → έχουμε ελαχ. αριθμήσιμο, κάθε στοιχείο έχει προηγούμενο $\Rightarrow \mathbb{N}$

$\Gamma = \{(0,n),(1,m) : n,m \in \mathbb{N}\}$

π.χ. $(1,5) <_{\Gamma} (0,6)$

$(n,0)$ $(m,1)$

$y=0$ $y=1$

άπειρο < άπειρο

1η περίπτωση.

$(i,x_0),(i,x_1),\dots,(i,x_n)$

$\varphi < 0 < \dots < Q$ → πεπερασμένα

σύνολα

έχουμε άπειρα τέτοια σύνολα