

Εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα Ι
5 Σεπτεμβρίου, 2008

Θέμα 1 (1 Μον). Σωστό ή Λάθος με πλήρη δικαιολόγηση.

Έστω $W_1 = \{(0, a) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(b, 0) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$ και \emptyset το κενό σύνολο. Τότε

1. $W_1 \cup W_2$ είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^2 .
2. $\dim_{\mathbb{R}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$
3. $\dim_{\mathbb{R}}(\emptyset) = 0$.

Θέμα 2 (1 Μον). Να δείξετε ότι το σύνολο λύσεων του παρακάτω γραμμικού συστήματος είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^3 και να βρείτε μια βάση του:

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 0 \\5y + 3z &= 0\end{aligned}$$

Θέμα 3 (1,5 Μον). Δίνεται η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$f(x, y, z) = (3x + z, 3y + z).$$

1. Να υπολογίσετε τους υποχώρους $\text{Ker } f$ και $\text{Im } f$ και τις διαστάσεις τους.
2. Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.
3. Να εξετάσετε αν η f είναι επί.

Θέμα 4 (1 Μον). Έστω f_1, f_2, f_3, f_4 τυχαία τέσσερα πολυώνυμα του $\mathbb{R}_3[x]$ που παράγουν τον $\mathbb{R}_3[x]$. Έπεται ότι είναι και βάση του $\mathbb{R}_3[x]$; Να δικαιολογήσετε πλήρως την (είτε θετική είτε αρνητική) απάντησή σας.

Θέμα 5 (1 Μον). Δίνεται η $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ με

$$f(p(x)) = p'(x).$$

Να βρείτε τον πίνακα $(f : \bar{a}, \bar{b})$, όπου $\bar{a} = (1, x^4, x^2, x^3, x)$, $\bar{b} = (1, x^2, x, x^3)$ είναι οι διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}_4[x]$ και $\mathbb{R}_3[x]$ αντίστοιχα.

Θέμα 6 (1,5 Μον). Δίνεται η $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ με πίνακα

$(f : \bar{a}, \bar{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, όπου $\bar{a} = (1, x, x^2)$. Να υπολογίσετε το $f(2x^2 + 5x + 1)$.

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της f .

Θέμα 7 (1,5 Μον). Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα.
2. Να υπολογίσετε τους ιδιόχωρους και τις διαστάσεις τους.
3. Είναι ο A διαγωνίσιμος; Αν ναι, να γράψετε ποιος είναι ο P . Αν όχι, να αναφέρετε ποιο κριτήριο διαγωνισιμότητας δεν ικανοποιεί.

Θέμα 8 (1,5 Μον). Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_2[x]$ με το παρακάτω εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

1. Είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ και ορθοκανονική;
2. Να δείξετε μόνο με χρήση του εσωτερικού γινομένου πως το σύνολο $\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.