Ασκήσεις για το σπίτι 3
Παράδοση των λύσεων: μέχρι τις 3 μ.μ. της Παρασκευής
10-01-2014

Άσκηση 1 (1 Μον)**.** Άσκηση 71, από τις σημειώσεις του Κ. Σκανδάλη.

Λύση.

1. $\exists x(x < y \leftrightarrow x|s \vee x|t)$ είναι ισοδύναμος με τους

$$\neg\forall x\neg(\neg(a \wedge \neg b) \wedge \neg(b \wedge \neg a)),$$

και

$$\exists x\neg(\neg(\neg a \vee b') \vee \neg(\neg b' \vee a)),$$

όπου a είναι ο τύπος $x < y$, b είναι $\neg(\neg(x|s) \wedge \neg(x|t))$ και b' είναι $x|s \vee x|t$.

2. $(\mathbb{O} < x \wedge \exists y(x < y)) \vee \forall x(z < y \wedge z < x)$ είναι ισοδύναμος με τους

$$\neg(\neg(\mathbb{O} < x \wedge \neg\forall\neg y(x < y)) \wedge \neg\forall x(z < y \wedge z < x)),$$

και

$$\neg(\neg\mathbb{O} < x \vee \neg(\exists y(x < y))) \vee \neg\exists x(\neg(z < y) \vee \neg(z < x)).$$

Άσκηση 2 (1 Μον)**.** Άσκηση 72(β′), από τις σημειώσεις του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. Έστω $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi$. Τότε από τον κανόνα γενίκευσης έπεται ότι $\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)$. Έχοντας τώρα από την υπόθεση ότι x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ, εφαρμόζουμε τον νόμο μεταφοράς ποσοδεικτών, δηλαδή $\mathcal{A} \models \varphi \to \forall\psi$.

Άσκηση 3 (1 Μον)**.** Άσκηση 77, από τις σημειώσεις του Κ. Σκανδάλη.

Λύση. Έστω μια δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v ώστε $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[v]$ και έστω $\mathcal{A} \models \varphi[v]$. Τότε από τον ορισμό του Tarsi έπεται πως $\mathcal{A} \models \psi[v]$. Άρα $\varphi \models \psi$.

Για το αντίστροφο, έστω φ είναι ο τύπος $x \neq \mathbb{O}$ και ψ είναι η πρόταση $\forall(x \neq \mathbb{O})$. Τότε $\varphi \models \psi$, διότι δεν υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mathcal{A} \models \varphi$. Ο λόγος είναι πως η σταθερά $\mathbb{O}$ έχει κάποια ερμηνεία στην $\mathcal{A}$, έστω $a \in A$. Οπότε για την αποτίμηση $v(x) = a$, δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi[v]$. Έτσι τετριμμένα ισχύει $\varphi \models \psi$. Όμως δεν ισχύει $\models (\varphi \to \psi)$, διότι για παράδειγμα για τη δομή $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, 0\}$ και την αποτίμηση $v(x) = 1$, έχουμε ότι $\mathcal{N} \models \varphi[v]$, αλλά $\mathcal{N} \not\models \psi[v]$.

Άσκηση 4 (1 Μον)**.** Να βρείτε δύο διαφορετικές κανονικές ποσοδεικτικές μορφές του τύπου

$$\forall x(P(x) \to Q(x,y)) \to (\exists z P(z) \to \exists x Q(z,x)).$$

Λύση. Εφαρμόζοντας τους νόμους μετονομασίας δεσμευμένων μεταβλητών έχουμε τις εξής δύο διαφορετικές κανονικές ποσοδεικτικές μορφές:

$$\exists x \exists w \forall v[(P(x) \to Q(x,y)) \to (P(v) \to Q(z,w))]$$

και

$$\exists w \forall v \exists x[(P(x) \to Q(x,y)) \to (P(v) \to Q(z,w))].$$

Άσκηση 5 (2 Μον)**.** Να δείξετε ότι για κάθε 3-μελές κατηγόρημα P και για κάθε x, y, z ισχύει

$$\exists x \forall y \forall z P(x,y,z) \models \forall y \forall z \exists x P(x,y,z),$$

και ότι

$$\forall y \forall z \exists x P(x,y,z) \not\models \exists x \forall y \forall z P(x,y,z).$$

Λύση. Έστω μια δομή $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mathcal{A} \models \exists x \forall y \forall z P(x,y,z)$. Άρα υπάρχει $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $b, c \in A$ η σχέση $P(a_0, b, c)$ να αληθεύει στην $\mathcal{A}$. Οπότε για κάθε $b, c \in A$ υπάρχει κάποιο $a \in A$, ώστε $P(a,b,c)$ να αληθεύει στην $\mathcal{A}$, για παράδειγμα $a = a_0$. Έτσι $\mathcal{A} \models \forall y \forall z \exists x P(x,y,z)$. Κατά συνέπεια δείξαμε ότι $\exists x \forall y \forall z P(x,y,z) \models \forall y \forall z \exists x P(x,y,z)$.

Για να δείξουμε ότι $\forall y \forall z \exists x P(x,y,z) \not\models \exists x \forall y \forall z P(x,y,z)$, θεωρούμε τη δομή $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, P\}$, όπου $P(x,y,z) \iff z$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των x, y. Τότε έχουμε πως για κάθε $a, b \in \mathbb{N}$ υπάρχει το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των a, b. Αλλά δεν υπάρχει φυσικός c τέτοιο ώστε το c να είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο όλων των ζευγών των φυσικών.

Άσκηση 6 (2 Μον)**.** Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις:

(α) $\forall x \neg P(x,x)$

(β) $\forall x \forall y (P(x,y) \lor P(y,x))$

(γ) $\forall x \forall y \Big(x \neq y \to (P(x,y) \leftrightarrow \neg P(y,x)) \Big)$

1. Να βρείτε για κάθε πρόταση μια μη κενή δομή στην οποία να ικανοποιείται.

2. Να εξετάσετε αν υπάρχει δομή στην οποία να ισχύουν (α) και (β).

3. Να εξετάσετε αν υπάρχει δομή στην οποία να ισχύουν (α) και (γ).

Λύση.

(1α) Θεωρούμε τη δομή $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, P\}$, όπου $P(x,y) \iff x < y$. Τότε έχουμε ότι $\mathcal{N} \models \forall x \neg P(x,x)$, διότι η διάταξη είναι γνήσια.

(1β) Θεωρούμε τη δομή $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, P\}$, όπου $P(x,y) \iff x \leq y$. Τότε έχουμε ότι $\mathcal{N} \models \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$, διότι κάθε δύο φυσικοί συγκρίνονται.

(1γ) Θεωρούμε πάλι τη δομή $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, P\}$, όπου $P(x,y) \iff x < y$. Τότε έχουμε ότι $\mathcal{N} \models \forall x \forall y \Big(x \neq y \to (P(x,y) \leftrightarrow \neg P(y,x)) \Big)$, διότι για κάθε δύο διακεκριμένους φυσικούς ισχύει $x < y$ αν και μόνο αν $y \not< x$.

(2) Έστω μια δομή $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mathcal{A} \models \forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$. Θέτουμε $x = y$, και βγάζουμε πως για όλα τα $a \in A$ πρέπει να ισχύει $P(a,a) \wedge \neg P(a,a)$. Άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια δομή.

(3) Από τα παραπάνω έχουμε πως στη δομή $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, P\}$, όπου $P(x,y) \iff x < y$, ισχύουν (α) και (g).

Άσκηση 7 (2 Μον)**.** Να δείξετε ότι υπάρχει μια δομή στη γλώσσα της αριθμητικής στην οποία αληθεύουν τα σύνολα $\{\varphi : \varphi$ πρόταση που αληθεύει στους φυσικούς$\}$ και $\{\exists z (z \cdot S^n(0) = x) : \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Λύση. Έστω $\Omega_1 = \{\varphi : \varphi$ πρόταση που αληθεύει στους φυσικούς$\}$ και $\Omega_2 = \{\exists z (z \cdot S^n(0) = x) : \ n \in \mathbb{N}\}$. Έστω Γ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Ισχυριζόμαστε πως η δομή $\mathcal{N}$ με σύμπαν τους φυσικούς και τη κλασσική ερμηνεία της γλώσσας της αριθμητικής ικανοποιεί το Γ. Πράγματι, όλοι οι τύποι του Γ που ανήκουν και στο Ω_1 αληθεύουν στην $\mathcal{N}$ από την υπόθεση. Έστω $\exists z (z \cdot S^{n_1}(0) = x), ... \exists z (z \cdot S^{n_k}(0) = x)$ να είναι όλοι οι τύποι που ανήκουν στο Γ. Τότε θέτουμε $m = max\{n_1, ..., n_k\}$ και θεωρούμε $m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m$. Έχουμε ότι $\mathcal{N} \models \exists z (z \cdot S^{n_1}(0) = x) \wedge ... \wedge \exists z (z \cdot S^{n_k}(0) = x) v[x|m!]$. Άρα το Γ είναι ικανοποιήσιμο σύνολο. Από το θεώρημα της Συμπάγειας έπεται πως και το $\Omega_1 \cup \Omega_2$ είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχει κάποια δομή στην οποία να αληθεύει το $\Omega_1 \cup \Omega_2$.