Κ. Ι. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ 1999

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ας αρχίσουμε προσπαθώντας να περιγράψουμε τι είναι η Λογική. Συχνά λέγεται ότι "η Λογική μελετά τους νόμους της σκέψης", αυτό όμως είναι παραπλανητικό. Η μελέτη των νόμων της σκέψης είναι αντικείμενο της Ψυχολογίας, ενώ η Λογική ενδιαφέρεται μόνο για τις σκέψεις εκείνες που αποτελούν 'αποδείξεις'. Στις αποδείξεις δεν μας ενδιαφέρει το περιεχόμενο, αλλά η μορφή. Για να δούμε τι εννοούμε με αυτό, ας ρίξουμε μια ματιά στις ακόλουθες αποδείξεις:

(1) Κάθε άνθρωπος είναι θνητός.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Ο Σωκράτης είναι θνητός.

(2) Κάθε άλογο είναι ασπόνδυλο ζώο.
Ο Ντορής είναι άλογο.
Ο Ντορής είναι ασπόνδυλο ζώο.

Παρατηρούμε ότι και οι δύο έχουν την ίδια μορφή:

Κάθε Α είναι Β.
Ο Γ είναι Α.
Ο Γ είναι Β.

Στην πρώτη απόδειξη και οι τρεις προτάσεις είναι αληθείς, ενώ στην δεύτερη απόδειξη η πρώτη και η τρίτη πρόταση είναι ψευδής και η δεύτερη πρόταση είναι αληθής (– υποθέτουμε ότι 'Ντορής' είναι το όνομα κάποιου αλόγου). Αυτό που πρέπει να ισχύει για μια απόδειξη είναι το εξής: Αν οι υποθέσεις είναι αληθείς, τότε και το συμπέρασμα είναι αληθές. Η Μαθηματική Λογική, που θα μας απασχολήσει εδώ, μελετά μαθηματικές αποδείξεις.

Από ό,τι ξέρουμε, ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος άνθρωπος που ασχολήθηκε συστηματικά με τη Λογική και διατύπωσε αποδεικτικούς κανόνες, που χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης. Σοβαρές λογικές μελέτες, σε κατεύθυνση διαφορετική από αυτή του Αριστοτέλη και των μαθητών του, πραγματοποίησαν μέλη της Στωϊκής φιλοσοφικής σχολής, ιδιαίτερα ο Χρύσιππος. Για πολλούς αιώνες οι φιλόσοφοι ασχολήθηκαν ουσιαστικά μόνο με την Αριστοτελική Λογική, η οποία εθεωρείτο ως αντίπαλη της Στωϊκής Λογικής - μετά την Αναγέννηση έγινε σαφές ότι επρόκειτο για συμπληρωματικές και όχι για αλληλοσυγκρουόμενες θεωρίες.

Ήδη από την αρχαιότητα φάνηκε ότι η χρήση φυσικών γλωσσών, π.χ. της ελληνικής, δημιουργούσε προβλήματα στις λογικές μελέτες. Ας δούμε ένα παράδειγμα που προέρχεται από τον πλατωνικό διάλογο *Ευθύδημος*:

(1) Αυτό είναι άλογο.
Αυτό είναι λευκό.
Άρα αυτό είναι λευκό άλογο.

(2) Αυτός ο σκύλος είναι πατέρας.
Αυτός ο σκύλος είναι δικός σου.
Άρα αυτός ο σκύλος είναι δικός σου πατέρας.

Οι προτάσεις της ομάδας (1) προφανώς αποτελούν ένα έγκυρο επιχείρημα, ενώ αυτές της (2) δεν αποτελούν, παρ' όλο που φαίνεται να έχουν την ίδια γλωσσική δομή με εκείνες της (1).
Έγινε λοιπόν σαφές ότι ήταν σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν 'συμβολικές' ή 'τυπικές' γλώσσες στη Λογική. Μέχρι το Μεσαίωνα η χρήση συμβόλων ήταν πολύ περιορισμένη - κάποια σύμβολα εχρησιμοποιούντο ως συντομογραφίες. Η χρήση συμβόλων στα Μαθηματικά, η οποία είχε συμβάλει στην ανάπτυξή τους, οδήγησε στην εισαγωγή συμβόλων και για τη μελέτη λογικών θεμάτων. Διαπιστώθηκε ότι με τη χρήση συμβόλων θα μπορούσε να αυξηθεί όχι μόνο η ακρίβεια στη διατύπωση επιχειρημάτων, με αποτέλεσμα να αποφεύγονται προβλήματα όπως το ανωτέρω, αλλά και η γενικότητα εφαρμογής μεθόδων και κανόνων.

Ο G. Leibniz (1646-1716) ήταν ο πρώτος που συνειδητοποίησε τη σπουδαιότητα εισαγωγής ενός καλού τρόπου συμβολισμού στα πλαίσια της ανάπτυξης ενός λογισμού επιχειρημάτων. Επίσης ο B. Bolzano (1781-1848) χρησιμοποίησε μια ημι-τυπική γλώσσα, δηλαδή τη γερμανική εμπλουτισμένη με διάφορα είδη σταθερών και μεταβλητών, για να μελετήσει βασικές έννοιες της Λογικής, όπως την έννοια της λογικής συνεπαγωγής. Ως θεμελιωτές της 'Συμβολικής' ή 'Τυπικής' ή 'Μαθηματικής' Λογικής θεωρούνται οι A. De Morgan (1806-1871) και G. Boole (1815-1864). Το 1847 δημοσιεύθηκε το έργο *Formal Logic* του πρώτου και το έργο *Mathematical Analysis of Logic* του δεύτερου, με τα οποία θεωρούμε ότι γεννήθηκε η νεότερη Λογική.

Στο τέλος του 19ου αιώνα διαμορφώθηκαν τρεις επικαλυπτόμενες σχολές Λογικής, η 'αλγεβρική', η 'λογικιστική' και η 'φορμαλιστική'. Στην εκπληκτική άνθησή τους, η οποία διήρκεσε και στον αιώνα μας, συνετέλεσαν η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών και των παραδόξων στη Θεωρία Συνόλων, την οποία ανέπτυξε σημαντικά ο G. Cantor (1845-1918).

Κυριότεροι εκπρόσωποι της αλγεβρικής σχολής ήταν οι G. Boole, J. Venn (1834-1923), C. Peirce (1839-1914) και E. Schröder (1841-1902). Η σχολή αυτή επικέντρωσε το ενδιαφέρον της στη μελέτη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ αριθμητικών πράξεων, όπως η πρόσθεση και ο πολ/σμός, και λογικών πράξεων. Κύριος στόχος ήταν η ανάπτυξη λογισμών με εφαρμογή σε διάφορες περιπτώσεις, όπως προτάσεις, σύνολα και πιθανότητες. Αρχίζοντας με ένα ή περισσότερα αλγεβρικά συστήματα, οι αλγεβριστές διατύπωναν ένα σύνολο αξιωμάτων τα οποία αλήθευαν σε κάθε ένα από τα συστήματα αυτά. Το σύστημα που ανέπτυξε ο Boole ήταν ουσιαστικά αυτό που σήμερα καλούμε 'άλγεβρα Μπουλ'.

Τα μέλη της λογικιστικής σχολής πίστευαν ότι η Λογική αποτελεί τη βάση για κάθε είδος ακριβούς επιχειρηματολογίας. Κύριοι εκπρόσωποί της ήταν οι G. Frege (1848-1925), ίσως ο μεγαλύτερος λογικός μετά τον Αριστοτέλη, και ο B. Russell (1872-1970). Ο Frege ανέπτυξε με μαθηματική αυστηρότητα μια πλούσια τυπική γλώσσα στο έργο του *Begriffsschrift* και προσπάθησε να δείξει ότι διάφορα μέρη των Μαθηματικών, όπως η Θεωρία Αριθμών, ήταν στην πραγματικότητα μέρη της Λογικής. Δυστυχώς, το σύστημα του ήταν αντιφατικό, όπως έδειξε ο Russell με το περίφημο παράδοξό του, και έπρεπε να απορριφθεί. Σε μια προσπάθεια να βελτιώσουν την κατάσταση, οι Russell και A. Whitehead (1861-1947) ανέπτυξαν τη 'θεωρία των τύπων' στο έργο τους *Principia Mathematica*.

Η φορμαλιστική σχολή είχε ως σημαντικότερους εκπροσώπους της τον R. Dedekind (1831-1916), τον G. Peano (1858-1932) και τον D. Hilbert (1862-1943). Σκοπός των ερευνών της σχολής αυτής ήταν η κατασκευή αξιωματικών συστημάτων για επί μέρους κλάδους των Μαθηματικών, π.χ. τη Γεωμετρία, τη Θεωρία Αριθμών κτλ. Η βασική κατεύθυνση ήταν η ίδια με αυτή που είχε ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία*, με έμφαση όμως στην επακριβή διατύπωση των λογικών κανόνων που επιτρέπεται να χρησιμοποιούνται. Ο Hilbert υπήρξε εμπνευστής του λεγόμενου 'προγράμματος του Hilbert', στόχος του οποίου ήταν η τυποποίηση των Μαθηματικών και η απόδειξη ότι οι συνήθεις αποδεικτικές μέθοδοι δεν είναι δυνατό να οδηγήσουν σε αντιφάσεις.

Άλλοι σημαντικοί λογικοί στον αιώνα μας ήταν οι L. Löwenheim (1878-1957), T. Skolem (1887-1963), A. Tarski (1901-1983), A. Church (1903-1995), K. Gödel (1906-1978) και S. Kleene (1909-1994). Ειδικά ο Gödel θεωρείται ως ο κορυφαίος λογικός του αιώνα, αφού απέδειξε δυο από τα θεμελιωδέστερα θεωρήματα της Λογικής, δηλαδή το ‘θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού’ και το ‘θεώρημα μη-πληρότητας της τυπικής αριθμητικής’.

Οι τυπικές γλώσσες που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα είναι οι εξής: η ‘γλώσσα του προτασιακού λογισμού’ και οι ‘πρωτοβάθμιες γλώσσες’. Στη γλώσσα του προτασιακού λογισμού οδηγούμαστε κάνοντας μια χοντροκομμένη αφαίρεση σε μια φυσική γλώσσα, ενώ στις πρωτοβάθμιες γλώσσες κάνοντας μια λεπτότερη στη γλώσσα που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά, δηλαδή σε μια φυσική γλώσσα μαζί με μερικά άλλα σύμβολα. Μιλώντας για τυπικές γλώσσες χρησιμοποιούμε φυσικές γλώσσες. Στη μελέτη μας λοιπόν πρέπει να κάνουμε διάκριση ανάμεσα στη ‘γλώσσα-αντικείμενο’, που είναι η τυπική γλώσσα που μελετάμε, και στη ‘μετα-γλώσσα’, που είναι η φυσική γλώσσα που μεταχειριζόμαστε στη μελέτη μας. Για μας μετα-γλώσσα είναι η ελληνική μαζί με μερικά σύμβολα και γλώσσα-αντικείμενο μια από τις τυπικές γλώσσες που αναφέραμε προηγουμένως, ο δε τρόπος εργασίας είναι αυτός που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά – αυτός είναι και ένας λόγος για τον οποίο η Λογική που μας ενδιαφέρει καλείται ‘Μαθηματική’.

Μια φυσική γλώσσα έχει δυο πλευρές:

α) τη ‘συντακτική’, δηλ. ένα σύνολο κανόνων που περιγράφουν ποιοί είναι οι επιτρεπτοί τρόποι για την κατασκευή λέξεων και προτάσεων, χωρίς την παραμικρή αναφορά σε ερμηνείες των λέξεων και προτάσεων, και

β) τη ‘σημασιολογική’ ή ‘σημαντική’, δηλ. την απόδοση νοήματος στις λέξεις και προτάσεις και στην συνέχεια την απόδοση τιμής αλήθειας (‘αληθής’ ή ‘ψευδής’) στις προτάσεις.

Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και με τις τυπικές γλώσσες. Η βασική διαφορά είναι ότι με μια τέτοια γλώσσα αποφεύγουμε τις ασάφειες μιας φυσικής γλώσσας, ορίζοντας (στη μετα-γλώσσα!) αυστηρά τις συντακτικές και σημασιολογικές έννοιες.

΄Οταν μιλάμε για ένα σύμβολο (ή συνδυασμό συμβόλων) του δίνουμε ένα όνομα, που συνήθως είναι το ίδιο το σύμβολο (ή ο συνδυασμός συμβόλων) μέσα σε εισαγωγικά. Π.χ., ‘Ηράκλειο’ είναι το όνομα μιας ελληνικής λέξης, ενώ Ηράκλειο είναι το όνομα μιας ελληνικής πόλης. Εδώ, που η διάκριση ανάμεσα στη γλώσσα-αντικείμενο και τη μετα-γλώσσα είναι σπουδαία, χρειάζεται πολύ συχνά να χρησιμοποιούμε ονόματα συμβόλων (ή συνδυασμών συμβόλων) της γλώσσας-αντικείμενο. Για απλότητα, δεχόμαστε τα εξής:

α) Ενα σύμβολο (ή συνδυασμός συμβόλων) της γλώσσας-αντικείμενο θα χρησιμοποιείται και ως όνομά του στη μετα-γλώσσα

β) Ως όνομα ενός συμβόλου (ή συνδυασμού συμβόλων) της μετα-γλώσσας θα χρησιμοποιείται

(1) το ίδιο το σύμβολο (ή ο ίδιος ο συνδυασμός), αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης και

(2) το σύμβολο (ή ο συνδυασμός) μέσα σε εισαγωγικά, στην αντίθετη περίπτωση.

Μερικά από τα σύμβολα των τυπικών γλωσσών είναι 'μεταβλητές' που παίρνουν τιμές σε κάποιο σύνολο προτάσεων, αριθμών κτλ. Στη μετα-γλώσσα χρειαζόμαστε κάτι παρόμοιο και γι' αυτό χρησιμοποιούμε 'συντακτικές μεταβλητές' που παίρνουν τιμές σε κάποιο σύνολο (συνδυασμών) συμβόλων της γλώσσας-αντικείμενο.

Κεφάλαιο 2

Προτασιακή Λογική

2.1 Η γλ σσα της προτασιακής λογικής

Η γλώσσα αυτή, που συμβολίζουμε με Γ_0, είναι φτωχή σε σύγκριση με μια φυσική γλώσσα: δεν έχει γράμματα με τα οποία φτιάχνονται λέξεις και στη συνέχεια προτάσεις, αλλά μόνο σύμβολα-προτάσεις που με τη χρήση μερικών συνδετικών συμβόλων-λέξεων μας δίνουν νέες προτάσεις. Το σύνολο των συμβόλων της, που συμβολίζουμε με $\Sigma(\Gamma_0)$, έχει τα εξής στοιχεία:

α) $p_0, p_1, p_2, ...$, που καλούνται 'προτασιακές μεταβλητές'

β) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, που καλούνται 'σύνδεσμοι' – αντίστοιχα 'άρνηση', 'σύζευξη', 'διάζευξη', 'συνεπαγωγή', 'ισοδυναμία'

γ) (,), που καλούνται 'παρενθέσεις' – αντίστοιχα 'αριστερή παρένθεση' και 'δεξιά παρένθεση'.

Το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών συμβολίζουμε με $M(\Gamma_0)$. Θα χρησιμοποιούμε τα $p, q, r, ...$ ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $M(\Gamma_0)$.

Οι σύνδεσμοι και οι παρενθέσεις ονομάζονται 'λογικά σύμβολα', γιατί, όπως θα δούμε, έχουν καθορισμένο νόημα, ενώ οι προτασιακές μεταβλητές 'μη λογικά σύμβολα', επειδή μπορούν να ερμηνευθούν με διάφορους τρόπους.

Έχοντας δει τα σύμβολα της Γ_0, ας στραφούμε στο συντακτικό μέρος.

Ορισμός 2.1.1 *''Έκφραση' της Γ_0 ονομάζεται μια πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολά της, π.χ. $\rightarrow p_0 \vee \neg, \ \ (p_1 \rightarrow p_2$.*

Με $E(\Gamma_0)$ συμβολίζουμε το σύνολο των εκφράσεων της Γ_0, θα χρησιμοποιούμε δε τα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, ...$ ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $E(\Gamma_0)$.

Φυσικά, μερικές μόνον από τις εκφράσεις της Γ_0 θα παίξουν τον ρόλο που παίζουν οι προτάσεις σε μια φυσική γλώσσα, αυτές που περιγράφονται από τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.2 *Μια έκφραση α καλείται 'προτασιακός τύπος' ανν (δηλ. αν και μόνον αν)*

α) είναι προτασιακή μεταβλητή ή

β) είναι της μορφής $(\neg\beta)$, $(\beta \wedge \gamma)$, $(\beta \vee \gamma)$, $(\beta \to \gamma)$, $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, όπου β, γ είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι.

Να μερικοί προτασιακοί τύποι: p_1, $(p_0 \wedge p_2)$, $(\neg p_1)$, $(p_3 \vee (p_5 \leftrightarrow p_0))$.
Το σύνολο των προτασιακών τύπων της Γ_0 συμβολίζουμε με $T(\Gamma_0)$. Τα γράμματα $\varphi, \psi, \chi, ...$ (προσοχή, άλλο το χ και άλλο το x!) θα χρησιμοποιούνται ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $T(\Gamma_0)$.

Η ύπαρξη του συνόλου των προτασιακών τύπων της Γ_0 στηρίζεται στο θεώρημα αναδρομής για το σύνολο των φυσικών αριθμών:
Αν A τυχόν σύνολο, $a \in A$ και $g : A \to A$, τότε υπάρχει $f : \mathbf{N} \to A$ τέτοια που

$$\begin{aligned} & f(0) = a \\ \text{και} \quad & f(n+1) = g(f(n)) \text{ για κάθε } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωσή μας, θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}(E(\Gamma_0))$ (δηλ. το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $E(\Gamma_0)$), το στοιχείο του $M(\Gamma_0)$ και τη συνάρτηση $h : \mathcal{P}(E(\Gamma_0)) \to \mathcal{P}(E(\Gamma_0))$ που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} h(X) = \{\alpha : \quad & \alpha \text{ της μορφής } (\neg\beta),\ (\beta \wedge \gamma),\ (\beta \vee \gamma),\ (\beta \to \gamma),\ (\beta \leftrightarrow \gamma), \\ & \text{όπου } \beta, \gamma \in X\}, \end{aligned}$$

για κάθε $X \subseteq E(\Gamma_0)$.
Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbf{N} \to \mathcal{P}(E(\Gamma_0))$ τέτοια που

$$\begin{aligned} & f(0) = M(\Gamma_0) \\ \text{και} \quad & f(n+1) = f(n) \cup h(f(n)) \text{ για κάθε } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Οι προτασιακοί τύποι είναι λοιπόν τα στοιχεία των συνόλων $M(\Gamma_0)$, $h(M(\Gamma_0))$, $h(M(\Gamma_0) \cup h(M(\Gamma_0)))$, ..., δηλ. τα στοιχεία του συνόλου $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} f(n)$.

Παρατήρηση. Για ευκολία, πολλές φορές χρησιμοποιούμε [,] ή { , } αντί για (,).

Επειδή το $T(\Gamma_0)$ ορίστηκε 'αναδρομικά', όταν θέλουμε να δείξουμε ότι όλοι οι προτασιακοί τύποι έχουν μια ιδιότητα, δουλεύουμε 'επαγωγικά', όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1 (Αρχή της επαγωγής για το $T(\Gamma_0)$)) *Αν $A \subseteq T(\Gamma_0)$ τέτοιο που*

α) $M(\Gamma_0) \subseteq A$ και

β) για κάθε $\varphi, \psi \in A$, οι $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ανήκουν στο A,

τότε $A = T(\Gamma_0)$.

Απόδειξη Έστω $A \subseteq T(\Gamma_0)$ για το οποίο ισχύουν τα α), β) προηγουμένως. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : T(\Gamma_0) \rightarrow \mathbf{N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$f(\varphi) = \text{αριθμός εμφανίσεων συνδέσμων στον } \varphi, \text{ για κάθε } \varphi.$$

Θα δείξουμε ότι $A = T(\Gamma_0)$. Πράγματι, έστω ότι $A \subset T(\Gamma_0)$. Τότε $T(\Gamma_0) - A \neq \emptyset$, οπότε το $f[T(\Gamma_0) - A]$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbf{N}$. Λόγω της αρχής του ελαχίστου φυσικού λοιπόν, το $f[T(\Gamma_0) - A]$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το n. Από τον ορισμό της f, υπάρχει $\varphi \in T(\Gamma_0) - A$ τέτοιο που $f(\varphi) = n$. Λόγω της υπόθεσης α), ο φ δεν μπορεί να είναι προτασιακή μεταβλητή, άρα είναι της μορφής $(\neg\psi)$ ή $(\psi \wedge \chi)$ ή ... . Έστω ότι είναι της μορφής $(\neg\psi)$. Τότε $f(\psi) = n - 1$, οπότε $\psi \in A$ και άρα $(\neg\psi) \in A$ (με βάση το β)), δηλ. $\varphi \in A$, που είναι άτοπο. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ο φ είναι της μορφής $(\psi \wedge \chi)$ ή ..., οπότε ισχύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα. Θ' αποδείξουμε ότι κάθε προτασιακός τύπος περιέχει τον ίδιο αριθμό δεξιών και αριστερών παρενθέσεων. Έστω A το σύνολο των προτασιακών τύπων που έχουν αυτή την ιδιότητα. Προφανώς $M(\Gamma_0) \subseteq A$ (αφού κάθε προτασιακή μεταβλητή περιέχει 0 δεξιές και 0 αριστερές παρενθέσεις). Έστω τώρα ότι $\varphi, \psi \in A$. Ο $(\neg\varphi)$ έχει μια δεξιά και μια αριστερή παρένθεση παραπάνω από τον φ, άρα περιέχει κι αυτός τον ίδιο αριθμό δεξιών και αριστερών παρενθέσεων, οπότε $(\neg\varphi) \in A$. Όμοια βλέπουμε ότι $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in A$, οπότε $A = T(\Gamma_0)$, σύμφωνα με την αρχή της επαγωγής.

Ως συνέπεια του ανωτέρω παραδείγματος, αποδεικνύεται ότι ο τρόπος που χρησιμοποιούμε τις παρενθέσεις δεν οδηγεί σε ασάφειες, με την έννοια ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ υπάρχει μοναδική διαδικασία κατασκευής του φ από τις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται σ' αυτόν. Για να αποδείξουμε το γεγονός αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο

Λήμμα 2.1.1 *Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ, κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα του φ δεν είναι προτασιακός τύπος.*

Απόδειξη. Άσκηση.

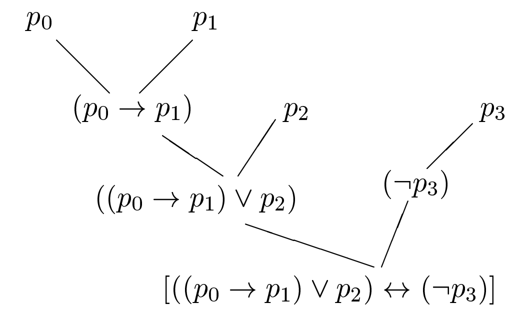
Θεώρημα 2.1.2 (Θεώρημα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας) *Για τις συναρτήσεις* $G_\neg : T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$, $G_\wedge, G_\vee, G_\to, G_\leftrightarrow : T(\Gamma_0) \times T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$ *που ορίζονται ως* $G_\neg(\varphi) = (\neg\varphi)$, $G_\wedge(\varphi, \psi) = (\varphi \wedge \psi)$ *και όμοια για τις* $G_\vee$, $G_\to$, $G_\leftrightarrow$, *ισχύουν τα εξής:*

α) το σύνολο $M(\Gamma_0)$ *και τα πεδία τιμών των* $G_\neg$, $G_\wedge$ *κτλ. είναι ξένα ανά δυο*

β) οι $G_\neg$, $G_\wedge$ *κ.λπ. είναι 1-1 συναρτήσεις.*

Απόδειξη α) Έστω, παραδείγματος χάρη, ότι για κάποιους προτασιακούς τύπους φ, ψ, χ ισχύει $G_\neg(\varphi) = G_\wedge(\psi, \chi)$, δηλαδή ότι ο $(\neg\varphi)$ ταυτίζεται με τον $(\psi \wedge \chi)$. Τότε η ακολουθία συμβόλων $\neg\varphi)$ θα ταυτίζεται με την $\psi \wedge \chi)$, άρα το πρώτο σύμβολο του προτασιακού τύπου ψ πρέπει να είναι το $\neg$, πράγμα που είναι αδύνατο (- ο ψ θα μπορούσε να είναι μόνο της μορφής $(\neg\psi_1)$). Άρα τα πεδία τιμών των $G_\neg$, $G_\wedge$ έχουν κενή τομή.
β) Έστω, παραδείγματος χάρη, ότι για κάποιους προτασιακούς τύπους φ, ψ, χ, θ ισχύει $G_\to(\varphi, \psi) = G_\to(\chi, \theta)$, δηλαδή ότι ο $(\varphi \to \psi)$ ταυτίζεται με τον $(\chi \to \theta)$. Τότε η ακολουθία συμβόλων $\varphi \to \psi)$ θα ταυτίζεται με την $\chi \to \theta)$. Συγκρίνοντας τώρα τις ακολουθίες φ και χ, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: η φ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα της χ, η χ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα της φ, η φ ταυτίζεται με την χ. Όμως οι δυο πρώτες περιπτώσεις αποκλείονται, με βάση το προηγούμενο Λήμμα. Άρα ο φ ταυτίζεται με τον χ. Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι ο ψ ταυτίζεται με τον θ, άρα ισχύει το ζητούμενο.

Όπως προαναφέραμε, το προηγούμενο θεώρημα εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του τρόπου κατασκευής κάθε προτασιακού τύπου από προτασιακές μεταβλητές μέσω των συναρτήσεων $G_\neg$, $G_\wedge$ κτλ. Μ' άλλα λόγια, σε κάθε προτασιακό τύπο αντιστοιχεί ένα μοναδικό 'δενδροδιάγραμμα', δηλαδή ένα διάγραμμα που απεικονίζει την κατασκευή του από προτασιακές μεταβλητές με τη βοήθεια των συνδέσμων. Παραδείγματος χάριν, στον προτασιακό τύπο $[((p_0 \to p_1) \vee p_2) \leftrightarrow (\neg p_3)]$ αντιστοιχεί το ακόλουθο δενδροδιάγραμμα:



Μάλιστα μπορούμε να δώσουμε ένα αλγόριθμο που, δεδομένου ενός προτασιακού τύπου, μας δίνει το μοναδικό δενδροδιάγραμμα που του αντιστοιχεί. Τα δενδροδιαγράμματα θα μας φανούν χρήσιμα όταν θα μιλήσουμε για τη σημασιολογική πλευρά της Γ_0.

Συχνά οι παρενθέσεις που περιέχει ένας προτασιακός τύπος είναι τόσο πολλές που δεν μπορούμε εύκολα να συλλάβουμε την δομή του. Γι' αυτό παραλείπουμε μερικές σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

α) Οι εξωτερικές παρενθέσεις ενός προτασιακού τύπου παραλείπονται.

β) Το $\neg$ θεωρείται ισχυρότερο από τους υπόλοιπους συνδέσμους και τα $\wedge, \vee$ θεωρούνται ισχυρότερα από τα $\rightarrow, \leftrightarrow$.

γ) Τα $\wedge, \vee$ θεωρούνται ισοδύναμα μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει για τα $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Έτσι, γράφοντας $p_0 \wedge p_1$ εννοούμε τον $(p_0 \wedge p_1)$, γράφοντας $\neg p_0 \vee p_1$ εννοούμε τον $((\neg p_0) \vee p_1)$ και γράφοντας $p_2 \wedge p_1 \rightarrow p_0 \vee p_4$ εννοούμε τον $((p_2 \wedge p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_4))$.

Αρκετά όμως είπαμε για την συντακτική πλευρά της Γ_0, ας ασχοληθούμε και με τη σημασιολογική της πλευρά. Μια ερμηνεία της Γ_0, η 'προτιθέμενη ερμηνεία', είναι η εξής:

α) Οι προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχούν σε 'στοιχειώδεις προτάσεις' της ελληνικής γλώσσας, προτάσεις δηλαδή που δεν περιέχουν μικρότερες και είναι αληθείς ή ψευδείς.

β) Οι σύνδεσμοι αντιστοιχούν στις εκφράσεις 'δεν', 'και', 'ή', 'αν ... τότε ..', '... αν και μόνον αν ...'.

γ) Οι παρενθέσεις αντιστοιχούν σε σημεία στίξης που υποδηλώνουν την αρχή και το τέλος μιας πρότασης.

Μ' αυτή την ερμηνεία οι προτασιακοί τύποι της Γ_0 αντιστοιχούν στις προτάσεις της ελληνικής γλώσσας που κατασκευάζονται από στοιχειώδεις με την βοήθεια των εκφράσεων 'δεν', 'και' κτλ. Παραδείγματος χάρη, αν η p_0 αντιστοιχεί στη στοιχειώδη πρόταση "ο x είναι ρητός αριθμός", η p_3 στην "ο y είναι ακέραιος αριθμός" και η p_1 στην "ο z είναι πραγματικός αριθμός", τότε ο προτασιακός τύπος $p_0 \wedge p_3 \rightarrow \neg p_1$ αντιστοιχεί στην πρόταση "αν ο x είναι ρητός αριθμός και ο y είναι ακέραιος αριθμός, τότε ο z δεν είναι πραγματικός αριθμός", ενώ ο $p_0 \rightarrow (p_3 \rightarrow \neg p_1)$ αντιστοιχεί στην πρόταση "αν ο y είναι ακέραιος αριθμός, τότε ο z δεν είναι πραγματικός αριθμός, με την προϋπόθεση ότι ο x είναι ρητός αριθμός".

Ας δούμε τώρα τους κανόνες απόδοσης μιας 'τιμής αλήθειας' σε κάθε προτασιακό τύπο της Γ_0.

Ορισμός 2.1.3 *'Αποτίμηση' (ή 'εκτίμηση') καλείται μια συνάρτηση* $a : M(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$*, όπου τα* A, Ψ *καλούνται 'τιμές αλήθειας' και αντιστοιχούν στις έννοιες 'αληθής', 'ψευδής'.*

Παρατήρηση. Από τον προηγούμενο ορισμό φαίνεται ότι περιοριζόμαστε σε δίτιμη λογική. Αντί για δυο, θα μπορούσαμε να πάρουμε 3, 4 ή άπειρες τιμές αλήθειας. Αυτές όμως οι παραλλαγές δε θα μας απασχολήσουν καθόλου.

Η απόδοση μιας από τις τιμές αλήθειας σε κάθε προτασιακό τύπο της Γ_0, δηλ. η εύρεση μιας συνάρτησης $\overline{a} : T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$, όταν έχει δοθεί μια αποτίμηση a, γίνεται σύμφωνα με τους κανόνες-πίνακες κατωτέρω. Οι πίνακες αυτοί καλούνται 'πίνακες αλήθειας' και υποβάλλονται από την προτιθέμενη ερμηνεία της Γ_0.

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\neg\varphi)$
A	Ψ
Ψ	A

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\psi)$	$\overline{a}(\varphi \wedge \psi)$	$\overline{a}(\varphi \vee \psi)$	$\overline{a}(\varphi \to \psi)$	$\overline{a}(\varphi \leftrightarrow \psi)$
A	A	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται για την στήλη που αντιστοιχεί στην συνεπαγωγή. Δεδομένης μιας αποτίμησης a, επειδή, όπως είδαμε, το σύνολο $T(\Gamma_0)$ ορίστηκε αναδρομικά από το $M(\Gamma_0)$ με την βοήθεια της συνάρτησης h, υπάρχει μοναδική επέκταση $\overline{a}$ της a όπως ανωτέρω αναφέραμε. Η απόδειξη μοιάζει μ' εκείνη του θεωρήματος αναδρομής για το $\mathbf{N}$ – επεκτείνουμε την a πρώτα στο σύνολο $h(M(\Gamma_0))$, κατόπιν στο $h(M(\Gamma_0) \cup h(M(\Gamma_0)))$ κ.ο.κ., παίρνοντας τη ζητούμενη συνάρτηση ως όριο αυτής της ακολουθίας συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.1.3 *Έστω a τυχούσα αποτίμηση. Υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $\overline{a} : T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ *τέτοια που*

1) η $\overline{a}$ είναι επέκταση της a και

2) για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ

$$\begin{aligned}
&\overline{a}(\neg\varphi) = F_{\neg}(\overline{a}(\varphi)),\\
&\overline{a}(\varphi \wedge \psi) = F_{\wedge}(\overline{a}(\varphi), \overline{a}(\psi)),\\
&\overline{a}(\varphi \vee \psi) = F_{\vee}(\overline{a}(\varphi), \overline{a}(\psi)), \qquad \textit{(*)}\\
&\overline{a}(\varphi \leftrightarrow \psi) = F_{\rightarrow}(\overline{a}(\varphi), \overline{a}(\psi)),\\
&\overline{a}(\varphi \leftrightarrow \psi) = F_{\leftrightarrow}(\overline{a}(\varphi), \overline{a}(\psi)),
\end{aligned}$$

όπου $F_{\neg} : \{A, \Psi\} \to \{A, \Psi\}$ *και* $F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}, F_{\leftrightarrow} : \{A, \Psi\}^2 \to \{A, \Psi\}$ *οι συναρτήσεις που αντιστοιχούν στους πίνακες αλήθειας ανωτέρω.*

Απόδειξη Καλούμε *αποδεκτή συνάρτηση* κάθε συνάρτηση $b : T \to \{A, \Psi\}$ τέτοια που $M(\Gamma_0) \subseteq T \subseteq T(\Gamma_0)$ και ισχύουν το 1) ανωτέρω και το

3) για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ, αν $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi, \varphi \leftrightarrow \psi \in T$, τότε $\varphi, \psi \in T$ και ισχύουν οι (*) ανωτέρω.

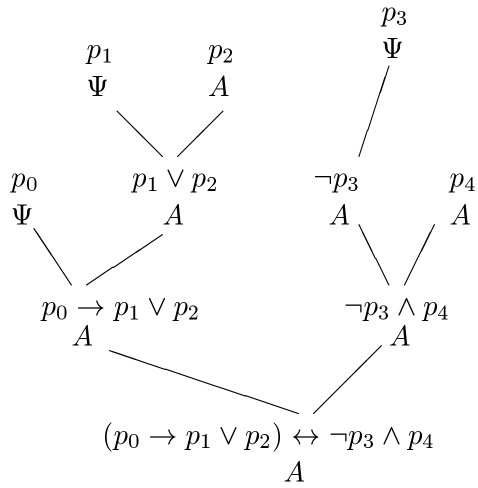
Θεωρούμε τώρα το σύνολο A όλων των αποδεκτών συναρτήσεων και θέτουμε $\overline{a} = \bigcup\{b : b \in A\}$. Με συνολοθεωρητικά επιχειρήματα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μοναδικής αναγνωσιμότητας, μπορούμε να αποδείξουμε ότι
α) το σύνολο $\overline{a}$ είναι συνάρτηση
β) το πεδίο ορισμού της $\overline{a}$ είναι το $T(\Gamma_0)$
γ) η $\overline{a}$ είναι αποδεκτή συνάρτηση
δ) η $\overline{a}$ είναι η μοναδική αποδεκτή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $T(\Gamma_0)$.

Όταν έχουμε μια αποτίμηση a, για να βρούμε την $\overline{a}(\varphi)$ χρησιμοποιούμε το δενδροδιάγραμμα του φ. Διαισθητικά είναι προφανές ότι η $\overline{a}(\varphi)$ εξαρτάται από τις τιμές αλήθειας που η a αντιστοιχεί στις πεπερασμένες το πλήθος προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στο φ. Αυτό αποδεικνύεται, δηλαδή ισχύει η ακόλουθη.

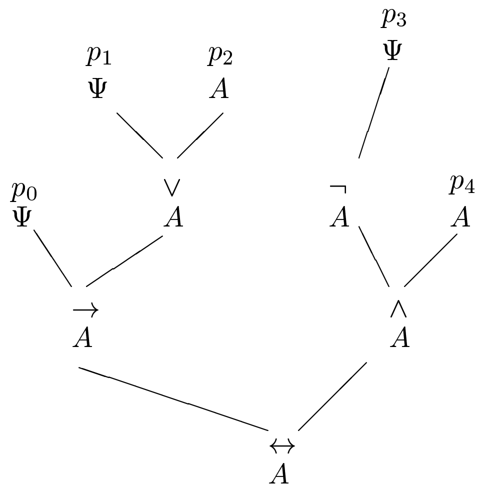
Πρόταση 2.1.1 *Για κάθε προτασιακό τύπο* φ *και οποιεσδήποτε αποτιμήσεις* a_1, a_2*, αν οι* a_1, a_2 *συμφωνούν στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στο* φ*, τότε* $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)$*.*

Απόδειξη. Άσκηση 7.

Παράδειγμα. Έστω a μια αποτίμηση τέτοια που $a(p_2) = a(p_4) = A$ και $a(p_0) = a(p_1) = a(p_3) = \Psi$. Τότε βρίσκουμε την $\overline{a}((p_0 \to p_1 \vee p_2) \leftrightarrow \neg p_3 \wedge p_4)$ ως εξής:



Για ευκολία, γράφουμε μόνο τις προτασιακές μεταβλητές και τους συνδέσμους:



Για μεγαλύτερη ευκολία, συμπιέζουμε το δενδροδιάγραμμα, κάνοντάς το μια μόνο γραμμή:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& p_0 & \to & p_1 & \vee & p_2 &) & \leftrightarrow & \neg & p_3 & \wedge & p_4 \\ & \Psi & A & \Psi & A & A & & A & A & \Psi & A & A \end{array}$$

Αρκετά όμως είπαμε για την Γ_0. Ας δούμε πώς μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για την μελέτη αποδείξεων.

2.2 Ταυτολογικές συνεπαγωγές

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε έννοιες που ορίσαμε μιλώντας για την σημασιολογική πλευρά της Γ_0.

Ορισμός 2.2.1 *Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$. Θα λέμε ότι*

α) η αποτίμηση a 'ικανοποιεί το φ' ανν $\overline{a}(\varphi) = A$ και 'η αποτίμηση a ικανοποιεί το T' ανν η a ικανοποιεί κάθε στοιχείο του T.

β) 'το T είναι ικανοποιήσιμο' ανν υπάρχει μια αποτίμηση που το ικανοποιεί.

γ) ο φ είναι 'ταυτολογία' ανν κάθε αποτίμηση ικανοποιεί το φ.

δ) ο φ είναι 'αντίφαση' ανν ο $\neg\varphi$ είναι ταυτολογία.

Ορισμός 2.2.2 *Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$. Θα λέμε ότι το T 'ταυτολογικά συνεπάγεται το φ', και θα γράφουμε $T \models \varphi$, ανν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και το φ.*

Παρατηρήσεις. 1) Προφανώς $T \models \varphi$ για κάθε $\varphi \in T$.
2) $\emptyset \models \varphi$ ανν ο φ είναι ταυτολογία, αφού κάθε αποτίμηση ικανοποιεί το $\emptyset$. Ταυτολογίες δηλαδή είναι οι ταυτολογικές συνέπειες του $\emptyset$.
3) Αν το T είναι μη ικανοποιήσιμο, τότε προφανώς $T \models \varphi$ για κάθε φ.
4) Αν $T = \{\psi\}$ και $T \models \varphi$, τότε γράφουμε απλά $\psi \models \varphi$ και λέμε ότι 'ο ψ ταυτολογικά συνεπάγεται το φ'.
5) Αν $\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$, τότε γράφουμε $\varphi \equiv \psi$ και λέμε ότι οι φ, ψ είναι 'ταυτολογικά ισοδύναμοι'.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της 'σε άτοπο απαγωγής'.

Θεώρημα 2.2.1 *Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_0)$:*

$$T \models \varphi \text{ ανν το } T \cup \{\neg\varphi\} \text{ δεν είναι ικανοποιήσιμο.}$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $T \models \varphi$, αλλά το $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Τότε υπάρχει αποτίμηση a που ικανοποιεί το $T \cup \{\neg\varphi\}$. Έχουμε καταλήξει τώρα σε άτοπο, διότι πρέπει $\overline{a}(\varphi) = A$, αφού η a ικανοποιεί το T και $T \models \varphi$, και ταυτόχρονα $\overline{a}(\varphi) = \Psi$, αφού η a ικανοποιεί τον $\neg\varphi$. Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.
($\Leftarrow$) Έστω ότι το $T \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, αλλά $T \not\models \varphi$. Τότε υπάρχει αποτίμηση a που ικανοποιεί το T αλλά δεν ικανοποιεί το φ. Άρα υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί το $T \cup \{\neg\varphi\}$, πράγμα αδύνατο. Το ζητούμενο έπεται.

Αργότερα θ' αποδείξουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.2 (Θεώρημα Συμπάγειας) *Έστω T ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο.*

Στη συνέχεια θα δούμε ένα αλγόριθμο, με βάση τον οποίο αποφασίζουμε αν ένα πεπερασμένο σύνολο προτασιακών τύπων ταυτολογικά συνεπάγεται ένα προτασιακό τύπο ή όχι. Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα πεπερασμένο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και ένα προτασιακό τύπο φ. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.1, μας ενδιαφέρουν μόνο οι τιμές αλήθειας που μια αποτίμηση αντιστοιχεί στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στα στοιχεία του $T \cup \{\varphi\}$. Έστω ότι n διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, εμφανίζονται στα στοιχεία του $T \cup \{\varphi\}$. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα αλήθειας με 2^n σειρές (γιατί;) και m στήλες, όπου m ο αριθμός των διαφορετικών προτασιακών τύπων που εμφανίζονται στα δενδροδιαγράμματα των στοιχείων του $T \cup \{\varphi\}$. Αφού προσδιορίσουμε τις τιμές αλήθειας σ' όλες τις στήλες, εξετάζουμε τις σειρές για να δούμε αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και τον φ ή όχι.

Παραδείγματα. 1) Θα δείξουμε ότι $p \wedge q \to r \models p \to (q \to r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \to r$	$p \wedge q \to r$	$p \to (q \to r)$
A	A	A	A	A	A	A
A	A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	A	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A

Από τις δυο τελευταίες στήλες βλέπουμε ότι ο $p \to (q \to r)$ παίρνει τιμή αλήθειας A κάθε φορά που ο $p \wedge q \to r$ παίρνει τιμή A, οπότε έχουμε το ζητούμενο.
2) Θα δείξουμε ότι ο προτασιακός τύπος $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ είναι ταυτολογία.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
A	A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A	A	A

Από την τελευταία στήλη βλέπουμε ότι ο προτασιακός τύπος που μας ενδιαφέρει παίρνει τιμή A, άρα είναι ταυτολογία.

Παρατηρήσεις. Μερικές φορές μπορούμε να φτάσουμε στο σκοπό μας χωρίς τη χρήση πινάκων αλήθειας. Ας δούμε δυο τέτοια παραδείγματα:
α) Για να δούμε ότι ο προτασιακός τύπος

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

είναι ταυτολογία, εργαζόμαστε ως εξής:

1) Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι η p έχει τιμή αλήθειας A. Τότε βλέπουμε ότι ο προτασιακός τύπος παίρνει τιμή A, χωρίς να ξέρουμε τίποτε για τις τιμές των q, r.

2) Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή αλήθειας Ψ. Αυτό δεν αρκεί για να βρούμε τι τιμή παίρνει όλος ο προτασιακός τύπος. Γι' αυτό υποθέτουμε ότι και η q έχει τιμή αλήθειας Ψ, οπότε ο προτασιακός τύπος παίρνει τιμή A.

3) Τέλος, υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή Ψ και η q τιμή A. Λόγω συμμετρίας των q, r, αν υποθέσουμε ότι η r έχει τιμή Ψ, τότε είμαστε στην περίπτωση 2). Γι' αυτό υποθέτουμε ότι η r έχει τιμή A. Τότε ο προτασιακός τύπος παίρνει πάλι τιμή A. Σχηματικά:

p	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r)$
A	A				A	A	A		A	A	A	
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ		A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ		
Ψ	A	A	A	A	A	Ψ	A	A	A	Ψ	A	A

β) Έστω τώρα ότι θέλουμε να δείξουμε ότι ο προτασιακός τύπος $(p \wedge q \to r) \to (p \vee q \to r)$ δεν είναι ταυτολογία. Αρκεί να βρούμε μια αποτίμηση που ν' αντιστοιχεί στον τύπο αυτό την τιμή Ψ. Μια τέτοια αποτίμηση θα δίνει στον $p \wedge q \to r$ τιμή A και στον $p \vee q \to r$ τιμή Ψ. Συνεχίζοντας έτσι βρίσκουμε ότι μια αποτίμηση a για την οποία $a(p) = A$, $a(q) = a(r) = \Psi$ δίνει στον αρχικό προτασιακό τύπο τιμή Ψ.

Ένας κατάλογος με γνωστές ταυτολογίες, που καλούνται ‘νόμοι της προτασιακής λογικής”, είναι ο εξής:

Νόμοι αντιμεταθετικότητας:	$\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$
	$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$
Νόμοι προσεταιριστικότητας:	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$

Νόμοι επιμεριστικότητας:	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
Νόμος διπλής άρνησης:	$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
Νόμος άρνησης συνεπαγωγής:	$\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$
Νόμοι de Morgan:	$\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
	$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
Νόμος απόκλεισης τρίτου:	$\varphi \vee \neg\varphi$
Νόμος αντιθετοαναστροφής:	$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$
Νόμος εξαγωγής:	$(\varphi \wedge \psi \to \chi) \leftrightarrow (\varphi \to (\psi \to \chi))$
Νόμοι αντικατάστασης:	$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
	$(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
	$(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

2.3 Πλήρη σύνολα συνδέσμων

Ας θεωρήσουμε μια γλώσσα που έχει για σύμβολα τις προτασιακές μεταβλητές, τις παρενθέσεις και μερικούς από τους πέντε συνδέσμους, ίσως μαζί με μερικούς άλλους, και η οποία μοιάζει με τη Γ_0. Άραγε η νέα αυτή γλώσσα είναι σημασιολογικά πλουσιότερη από τη Γ_0, φτωχότερη από τη Γ_0 ή ισοδύναμη με τη Γ_0; Ο σκοπός μας σ' αυτή την παράγραφο είναι ν' απαντήσουμε σ' αυτή την ερώτηση.

Κατ' αρχήν χρειαζόμαστε ένα ορισμό.

Ορισμός 2.3.1 *Έστω* $\in \mathbf{N}$. *'Συνάρτηση Boole με* $+1$ *μεταβλητές' καλείται κάθε συνάρτηση* $f : \{A, \Psi\}^{k+1} \to \{A, \Psi\}$.

Είναι προφανές ότι σε κάθε προτασιακό τύπο με $+1$ διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχεί μια συνάρτηση Boole με $+1$ μεταβλητές. Ισχύει μήπως και το αντίθετο; Η απάντηση είναι "ναι", όπως φαίνεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.1 *Αν* f *είναι μια συνάρτηση Boole με* $+1$ *μεταβλητές,* $\in \mathbf{N}$, *τότε υπάρχει προτασιακός τύπος* φ *στον οποίο εμφανίζονται οι* p_0, ..., p_k *τέτοιος που για κάθε αποτίμηση* a *να ισχύει:*

$$\overline{a}(\varphi) = f(a(p_0), ..., a(p_k)),$$

δηλαδή ο πίνακας αλήθειας του φ *να περιγράφει πλήρως την* f.

Πριν από την απόδειξη του θεωρήματος, ας δούμε ένα παράδειγμα που θα κάνει ευκολότερη την κατανόηση της απόδειξης. Έστω λοιπόν f η συνάρτηση Boole με τρεις μεταβλητές που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} f(\Psi,\Psi,\Psi)=\Psi & f(A,\Psi,\Psi)=A \\ f(\Psi,\Psi,A)=A & f(A,\Psi,A)=\Psi \\ f(\Psi,A,\Psi)=A & f(A,A,\Psi)=\Psi \\ f(\Psi,A,A)=\Psi & f(A,A,A)=A. \end{array}$$

(για απλότητα, γράφουμε Ψ,Ψ,Ψ αντί για $<\Psi,\Psi,\Psi>$, κτλ.).
Προσδιορίζουμε κατ' αρχήν τα στοιχεία του $\{A,\Psi\}^3$ στα οποία η f αντιστοιχεί την τιμή A. Αυτά είναι τα εξής:

$$<\Psi,\Psi,A>,\ <\Psi,A,\Psi>,\ <A,\Psi,\Psi>,\ <A,A,A> \quad (*).$$

Σε κάθε μια από αυτές τις διατεταγμένες τριάδες αντιστοιχούμε ένα προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι p_0, p_1, p_2 ως εξής:
Αν το πρώτο στοιχείο της τριάδας είναι A, τότε παίρνουμε την p_0, ενώ αν είναι Ψ, παίρνουμε την $\neg p_0$. Όμοια για τα άλλα δυο στοιχεία της τριάδας και τελικά παίρνουμε τη σύζευξη των τριών στοιχειωδών προτασιακών τύπων που προκύπτουν. Έτσι στην $<\Psi,\Psi,A>$ αντιστοιχεί ο προτασιακός τύπος $\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$.
Η διάζευξη των προτασιακών τύπων που αντιστοιχούν στις διατεταγμένες τριάδες (*) είναι ο προτασιακός τύπος

$$(\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge p_1 \wedge p_2),$$

του οποίου ο πίνακας αλήθειας περιγράφει πλήρως την f.

Ας γυρίσουμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος.
Απόδειξη. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Έστω ότι το πεδίο τιμών της f είναι το $\{\Psi\}$. Τότε ο πίνακας αλήθειας του

$$(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_1) \vee ... \vee (p_k \wedge \neg p_k)$$

περιγράφει πλήρως την f.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι υπάρχουν $n+1$ διατεταγμένες $+ 1$-άδες, $n \in \mathbf{N}$, τις οποίες η f αντιστοιχεί στο A, ας πούμε οι

$$\begin{array}{c} <\tau_{00},\tau_{01},...,\tau_{0k}> \\ <\tau_{10},\tau_{11},...,\tau_{1k}> \\ ..... \\ <\tau_{n0},\tau_{n1},...,\tau_{nk}>. \end{array}$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο προτασιακός τύπος φ που ζητάμε είναι ο $\psi_0 \vee \psi_1 \vee ... \vee \psi_n$, όπου $\psi_i = \chi_{i0} \wedge ... \wedge \chi_{ik}$, $i = 0, ..., n$ και

$$\chi_{ij} = \begin{cases} p_j, & \text{αν } \tau_{ij} = A \\ \neg p_j, & \text{αν } \tau_{ij} = \Psi. \end{cases}$$

Πράγματι, έστω a μια αποτίμηση. Αν $a(p_0) = \tau_{i0}$, ..., $a(p_k) = \tau_{ik}$ για κάποιο i, τότε

$$\overline{a}(\varphi) = A = f(a(p_0), ..., a(p_k)).$$

Αν πάλι $< a(p_0), ..., a(p_k) > \neq < \tau_{i0}, ..., \tau_{ik} >$ για κάθε $i = 0, ..., n$, τότε

$$f(a(p_0), ..., a(p_k)) = \Psi = \overline{a}(\varphi).$$

Παρατηρήσεις. α) Όταν ο πίνακας αλήθειας του φ περιγράφει πλήρως την συνάρτηση Boole f, θα λέμε ότι "ο φ αντιπροσωπεύει την f".
β) Πάντα υπάρχουν περισσότεροι από ένας προτασιακοί τύποι που αντιπροσωπεύουν την ίδια συνάρτηση Boole f – αν ο φ αντιπροσωπεύει την f, τότε κάθε προτασιακός τύπος ταυτολογικά ισοδύναμος με τον φ επίσης αντιπροσωπεύει την f. Στο παράδειγμα που προαναφέραμε, ο $p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)$ επίσης αντιπροσωπεύει την f.

Ορισμός 2.3.2 *Θα λέμε ότι ένας προτασιακός τύπος είναι 'σε κανονική διαζευκτική μορφή' ανν είναι της μορφής* $\psi_0 \vee \psi_1 \vee ... \vee \psi_n$, *όπου* $\psi_i = \chi_{i0} \wedge ... \wedge \chi_{ik}$, $i = 0, ..., n$, *και* χ_{ij} *είναι μια προτασιακή μεταβλητή ή άρνηση προτασιακής μεταβλητής.*

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 2.3.1 είναι το

Πόρισμα 2.3.1 *Κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με ένα προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή.*

Απόδειξη. Άσκηση.

Τώρα είμαστε σε θέση ν' απαντήσουμε στο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή της παραγράφου σε δυο περιπτώσεις, την περίπτωση που παίρνουμε τους πέντε αρχικούς συνδέσμους μαζί με κάποιους νέους και την περίπτωση που παίρνουμε μόνο μερικούς από τους αρχικούς συνδέσμους.
Πρώτη περίπτωση: Έστω λοιπόν ότι παίρνουμε, εκτός από τους αρχικούς συνδέσμους, και το νέο σύνδεσμο # και αναπτύσσουμε την νέα γλώσσα Γ_0' όπως την Γ_0 (δίνουμε δηλαδή ορισμό για τους προτασιακούς τύπους, καθορίζουμε τον πίνακα αλήθειας του # κτλ.).
Έστω τώρα $\varphi_{\#}$ ένας προτασιακός τύπος της Γ_0'. Ο πίνακας αλήθειάς του

περιγράφεται πλήρως από μια συνάρτηση Boole, έστω την f. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.1, υπάρχει προτασιακός τύπος ψ της Γ_0 που αντιπροσωπεύει την f. Τότε οι $\varphi_{\#}$, ψ έχουν ακριβώς τον ίδιο πίνακα αλήθειας, οπότε είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.
Άρα η Γ_0' είναι ταυτολογικά ισοδύναμη με την Γ_0. Φυσικά το ίδιο ισχύει και αν πάρουμε περισσότερους από ένα νέους συνδέσμους.
Δεύτερη περίπτωση: Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.3.1, αν κρατήσουμε μόνο τους $\neg, \wedge, \vee$ έχουμε την ίδια γλώσσα. Όπως θα δούμε, μπορούμε να κρατήσουμε λιγότερους. Για να προχωρήσουμε όμως χρειαζόμαστε ένα ορισμό.

Ορισμός 2.3.3 *Έστω C σύνολο συνδέσμων. Θα λέμε ότι το C είναι 'πλήρες' (ή 'επαρκές') ανν κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με ένα προτασιακό τύπο που περιέχει μόνο συνδέσμους που ανήκουν στο C.*

Όπως είδαμε, το $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι πλήρες. Παραλείποντας ένα από τους $\wedge, \vee$ έχουμε πάλι ένα πλήρες σύνολο.

Πρόταση 2.3.1 *Τα $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ είναι πλήρη.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρες – η απόδειξη για το $\{\neg, \vee\}$ είναι όμοια.
Έστω λοιπόν φ τυχών προτασιακός τύπος. Με βάση το Πόρισμα 2.3.1, υπάρχει προτασιακός τύπος φ^* στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \wedge, \vee$ τέτοιος που $\varphi \equiv \varphi^*$.
Ο τρίτος νόμος της αντικατάστασης δίνει $\psi \vee \chi \equiv \neg(\neg\psi \wedge \neg\chi)$. Συνεπώς, ξεκινώντας από το μικρότερο κομμάτι του φ^* στο οποίο εμφανίζεται ο $\vee$ και προχωρώντας σε μεγαλύτερα, μπορούμε ν' απαλλαγούμε από τις εμφανίσεις του στον φ^*. Έτσι παίρνουμε ένα προτασιακό τύπο φ^{**} στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \wedge$ τέτοιο που $\varphi \equiv \varphi^{**}$ (δες Άσκηση 12).

Παρατηρήσεις. α) Για να δώσουμε μια αυστηρή απόδειξη της προηγούμενης πρότασης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαγωγής για το $T(\Gamma_0)$, κατάλληλα τροποποιημένη (δηλαδή αντί για το $T(\Gamma_0)$ θα ισχύει για το σύνολο $T'(\Gamma_0)$ όλων των προτασιακών τύπων στους οποίους εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \wedge, \vee$).
β) Λόγω της Πρότασης 2.3.1, θα μπορούσαμε να πάρουμε μόνο δυο συνδέσμους από την αρχή και να εισαγάγουμε τους άλλους τρεις για λόγους ευκολίας – αυτό θα κάνουμε αργότερα στον κατηγορηματικό λογισμό.

Έχοντας ένα πλήρες σύνολο συνδέσμων C και ένα προτασιακό τύπο φ, για να βρούμε ένα προτασιακό τύπο που περιέχει συνδέσμους μόνο από το C και είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με το φ χρησιμοποιούμε τους νόμους της αντικατάστασης, ακολουθώντας την διαδικασία της απόδειξης της προηγούμενης πρότασης.

Παράδειγμα. Ας βρούμε ένα προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \vee$ και ο οποίος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $p \vee q \to (q \leftrightarrow r)$. Σχηματικά προχωρούμε ως εξής:

$p \vee q \to (q \to r) \wedge (r \to q)$	2ος νόμος αντικατάστασης
$p \vee q \to (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)$	1ος νόμος αντικατάστασης
$p \vee q \to \neg(\neg(\neg q \vee r) \vee \neg(\neg r \vee q))$	4ος νόμος αντικατάστασης
$\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg(\neg q \vee r) \vee \neg(\neg r \vee q))$	1ος νόμος αντικατάστασης.

Το να δείξουμε ότι ένα σύνολο συνδέσμων C δεν είναι πλήρες είναι πιο δύσκολο από το να δείξουμε ότι είναι. Συνήθως κάνουμε το εξής: Δείχνουμε ότι ο πίνακας αλήθειας κάθε προτασιακού τύπου που περιέχει συνδέσμους μόνο από το C έχει κάποια ιδιομορφία. Κατόπιν βρίσκουμε ένα προτασιακό τύπο που περιέχει ένα σύνδεσμο που δεν ανήκει στο C και του οποίου ο πίνακας αλήθειας δεν έχει αυτή την ιδιομορφία.

Παράδειγμα. Θα δείξουμε ότι το $\{\wedge, \to\}$ δεν είναι πλήρες.

Παρατηρούμε ότι κάθε προτασιακός τύπος που περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\wedge, \to$ παίρνει τιμή A όταν οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται σ' αυτόν παίρνουν τιμή A (– για αυστηρή απόδειξη, χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής). Για τον προτασιακό τύπο $\neg p_0$ όμως δεν ισχύει αυτό.

Θα κλείσουμε την παράγραφο με μια συζήτηση σχετικά με n-θέσιους συνδέσμους, για $n \leq 2$, που θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε. Προφανώς ο πίνακας αλήθειας ενός n-θέσιου συνδέσμου περιγράφεται πλήρως από μια συνάρτηση Boole με n μεταβλητές. Αλλά το πλήθος τέτοιων συναρτήσεων είναι 2^{2^n}. Άρα υπάρχουν 2^{2^n} δυνατοί n-θέσιοι σύνδεσμοι.

<u>n=0</u>. Υπάρχουν δυο 0-θέσιοι σύνδεσμοι, οι $\top$ και $\bot$, που αποτελούν από μόνοι τους προτασιακούς τύπους τέτοιους που για κάθε αποτίμηση a: $\overline{a}(\top) = A$ και $\overline{a}(\bot) = \Psi$.

<u>n=1</u>. Υπάρχουν τέσσερις 1-θέσιοι σύνδεσμοι: οι δυο αντιστοιχούν στις σταθερές συναρτήσεις με τιμή A, Ψ αντίστοιχα, ένας αντιστοιχεί στην ταυτοτική συνάρτηση και ο τέταρτος είναι ο $\neg$, που έχουμε δει.

<u>n=2</u>. Υπάρχουν δέκα έξι δυνατοί 2-θέσιοι σύνδεσμοι, από τους οποίους μόνο οι 10 είναι ουσιαστικά διθέσιοι – οι υπόλοιποι είναι ουσιαστικά 0-θέσιοι ή 1-θέσιοι. Εκτός από αυτούς που έχουμε δει, πρέπει ν' αναφέρουμε τους $+$, $\downarrow$, $|$ που αντιστοιχούν στις ελληνικές εκφράσεις "... ή ... αλλά όχι και τα δυο" (αποκλειστική διάζευξη), "ούτε ... ούτε ...", "δεν ... ή δεν ..." και έχουν τους εξής πίνακες αλήθειας:

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\psi)$	$\overline{a}(\varphi + \psi)$	$\overline{a}(\varphi \downarrow \psi)$	$\overline{a}(\varphi \vert \psi)$
A	A	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A

Παράδειγμα. Το $\{|\}$ είναι πλήρες (υποθέτουμε ότι έχουμε τροποποιήσει τον ορισμό του συνόλου των προτασιακών τύπων κτλ.).
Προφανώς για κάθε φ, ψ:

$$\neg\varphi \equiv \varphi|\varphi \quad \text{και} \quad \varphi \vee \psi \equiv (\varphi|\varphi)|(\psi|\psi).$$

Αφού το $\{\neg, \vee\}$ είναι πλήρες, το ίδιο ισχύει και για το $\{|\}$.
Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι το $\{\downarrow\}$ είναι πλήρες.

Πρόταση 2.3.2 *Για κάθε διθέσιο σύνδεσμο $*$ διαφορετικό από τους $|$, $\downarrow$, το $\{*\}$ δεν είναι πλήρες.*

Απόδειξη. Έστω $*$ διθέσιος σύνδεσμος τέτοιος που το $\{*\}$ είναι πλήρες, αλλά ο $*$ διαφέρει από τους $\neq |, \downarrow$.
Αν $*(A, A) = A$, τότε κάθε προτασιακός τύπος στον οποίο εμφανίζεται μόνο ο $*$ θα έπαιρνε τιμή A όταν όλες οι προτασιακές μεταβλητές του έπαιρναν τιμή A. Όμως ο $\neg p_0$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Άρα $*(A, A) = \Psi$.
Όμοια βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει $*(\Psi, \Psi) = A$. Για τις τιμές $*(A, \Psi)$, $*(\Psi, A)$ έχουμε συνολικά τέσσερις περιπτώσεις:

$$\text{α) } A,\ A \quad \text{β) } A,\ \Psi \quad \text{γ) } \Psi,\ A \quad \text{δ) } \Psi,\ \Psi.$$

Επειδή $* \neq |, \downarrow$, οι περιπτώσεις α) και δ) δεν μπορεί να ισχύουν. Αν ισχύει η γ), τότε $*(\varphi, \psi) \equiv \neg\varphi$. Αν ισχύει η β), τότε $*(\varphi, \psi) \equiv \neg\psi$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, ο $*$ θα ήταν ορίσιμος από τον $\neg$. Όμως το $\{\neg\}$ δεν είναι πλήρες, άρα το $\{*\}$ δεν είναι πλήρες.

Παρατήρηση. Αν από τους 10 ουσιαστικά διθέσιους συνδέσμους εξαιρέσουμε τους $\leftrightarrow$, $+$, οποιοσδήποτε από τους υπόλοιπους 8 αποτελεί μαζί με τον $\neg$ πλήρες σύνολο.

2.4 Προτασιακός λογισμός

Ένα ερώτημα που ανακύπτει φυσιολογικά είναι το εξής:
Είναι δυνατό να συστηματοποιηθούν οι ταυτολογίες στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος; Μ' άλλα λόγια, υπάρχει σύνολο αξιωμάτων και κανόνων με βάση τα οποία μπορούν να παραχθούν οι ταυτολογίες και μόνον αυτές;

Εδώ βέβαια η έννοια του 'αξιωματικού' ή 'παραγωγικού' συστήματος θα είναι αυστηρά καθορισμένη στα πλαίσια της γλώσσας του προτασιακού λογισμού - συνήθως τα αξιωματικά συστήματα δεν παρουσιάζονται με χρήση τυπικών γλωσσών.

Ορισμός 2.4.1 *Ένα 'αξιωματικό' (ή 'τυπικό') σύστημα για τον προτασιακό λογισμό αποτελείται από τα εξής:*

α) ένα σύνολο προτασιακών τύπων A και

β) ένα σύνολο K με στοιχεία (διμελείς) σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα προτασιακών τύπων και προτασιακούς τύπους.

Τα στοιχεία του A καλούνται 'αξιώματα' και αυτά του K καλούνται 'αποδεικτικοί κανόνες'. Αν $\kappa \in K$ και $\tau_1, ..., \tau_n, \tau$ είναι προτασιακοί τύποι τέτοιοι που $< \{\tau_1, ..., \tau_n\}, \tau > \in \kappa$, τότε λέμε ότι "ο τ είναι άμεση συνέπεια των $\tau_1, ..., \tau_n$ βάσει του κ".

Ορισμός 2.4.2 *Έστω $\mathcal{A} =< A, K >$ ένα αξιωματικό σύστημα για τον προτασιακό λογισμό, $B \subseteq T$ και $\tau \in T(\Gamma_0)$.*

α) 'Τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}$ από το B' καλείται κάθε πεπερασμένη ακολουθία προτασιακών τύπων $\tau_1, ..., \tau_n$ τέτοια που για κάθε $i = 1, ..., n$

1) $\tau_i \in A \cup B$ ή

2) ο τ_i είναι άμεση συνέπεια προηγούμενων προτασιακών τύπων βάσει κάποιου αποδεικτικού κανόνα.

Όταν $B = \emptyset$, αντί για 'τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}$ από το $\emptyset$' λέμε απλά 'τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}$'.

β) Λέμε ότι 'ο τ αποδεικνύεται τυπικά στο $\mathcal{A}$ από το B', γράφοντας $B \vdash_{\mathcal{A}} \tau$, ανν υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\tau_1, ..., \tau_n$ στο $\mathcal{A}$ από το B τέτοια που $\tau_n = \tau$.
Όταν $B \vdash_{\mathcal{A}} \tau$, τα στοιχεία του B καλούνται 'υποθέσεις' και ο τ καλείται 'συμπέρασμα'.
Αν $B = \emptyset$ και $B \vdash_{\mathcal{A}} \tau$, τότε γράφουμε απλά $\vdash_{\mathcal{A}} \tau$ και λέμε ότι 'ο τ είναι τυπικό θεώρημα του $\mathcal{A}$'.

Παρατηρήσεις. 1) Οι τυπικές αποδείξεις στο $\mathcal{A}_0$ που μπορούμε να κατασκευάσουμε αντιστοιχούν σε αποδείξεις που μπορούμε να κάνουμε με τις προτάσεις της ελληνικής γλώσσας που αναφέραμε στο τέλος της περιγραφής της κύριας ερμηνείας της Γ_0. Αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιούμε την

έκφραση 'προτασιακός λογισμός'.
2) Είναι φανερό ότι αν $B \vdash_{\mathcal{A}} \tau$, τότε $B' \vdash_{\mathcal{A}} \tau$ για κάποιο πεπερασμένο $B' \subseteq B$.
3) Επίσης είναι προφανές ότι $B \vdash_{\mathcal{A}} \tau$ για κάθε $\tau \in B$.
4) Αν $B \vdash_{\mathcal{A}} \tau$, τότε προφανώς $B' \vdash_{\mathcal{A}} \tau$ για κάθε $B \subseteq B' \subseteq T(\Gamma_0)$.

Μετά από αυτές τις γενικότητες, ας δούμε ποιό είναι το αξιωματικό σύστημα (του Hilbert) $\mathcal{A}_0 =< A_0, K_0 >$ που θα εξετάσουμε. A_0 είναι το σύνολο με στοιχεία όλους τους προτασιακούς τύπους που δίνουν τα 'αξιωματικά σχήματα'

$A\Sigma 1.$ $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

$A\Sigma 2.$ $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

$A\Sigma 3.$ $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

και K_0 το σύνολο με μοναδικό στοιχείο τον αποδεικτικό κανόνα 'Modus Ponens' (MP) που περιγράφεται ως εξής:

$$\frac{\varphi \to \psi,\ \ \varphi}{\psi}$$

Μια εύλογη απορία που δημιουργείται είναι η εξής: Γιατί στα αξιωματικά σχήματα του $\mathcal{A}_0$ εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \to$;
Αυτό δε δημιουργεί προβλήματα, αφού, όπως είδαμε, το σύνολο $\{\neg, \to\}$ είναι πλήρες.

Παράδειγμα. Η ακόλουθη τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}_0$ δείχνει ότι $\vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \varphi$. Σημειώνουμε ότι, για ευκολία, όταν έχουμε μια τυπική απόδειξη $\tau_1, ..., \tau_n$ στο $\mathcal{A}_0$ (από κάποιο σύνολο B), γράφουμε τους προτασιακούς τύπους τον ένα κάτω από τον άλλο, με επεξηγήσεις δεξιά.

1.	$[\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)] \to [(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)]$	$A\Sigma 2$
2.	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	$A\Sigma 1$
3.	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	1, 2, M.P.
4.	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi))$	$A\Sigma 1$
5.	$\varphi \to \varphi$	3, 4, M.P.

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά θεωρήματα για το αξιωματικό σύστημα $\mathcal{A}_0$. Εδώ πρέπει να τονιστεί η διαφορά ανάμεσα σε 'τυπικά θεωρήματα' και 'θεωρήματα'. Ένα τυπικό θεώρημα είναι έκφραση μιας τυπικής γλώσσας, ενώ ένα θεώρημα είναι έκφραση της μετα-γλώσσας. Ανάλογη είναι η διαφορά ανάμεσα σε μια 'τυπική απόδειξη' και μια 'απόδειξη'.

Θεώρημα 2.4.1 (Θεώρημα Απαγωγής) *Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_0)$:*

$$\text{αν } T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \psi, \text{ τότε } T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και $T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \psi$. Τότε υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\psi_1, ..., \psi_n = \psi$ στο $\mathcal{A}_0$ από το $T \cup \{\varphi\}$. Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαγωγής θα δείξουμε ότι για κάθε $i = 1, ..., n$: $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi_i$.
Πρώτο βήμα: $i = 1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
α) $\psi_1 \in A_0 \cup T$.
Τότε $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi_1$, όπως φαίνεται από την ακόλουθη τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}_0$ από το T:

$$\begin{array}{lll} 1. & \psi_1 \to (\varphi \to \psi_1) & A\Sigma 1 \\ 2. & \psi_1 & \text{στοιχείο του } A_0 \cup T \\ 3. & \varphi \to \psi_1 & 1,\ 2,\ \text{M.P.} \end{array}$$

β) $\psi_1 = \varphi$.
Από το προηγούμενο παράδειγμα, ξέρουμε ότι $\vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \varphi$. Άρα $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \varphi$, δηλ. $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi_1$.
Δεύτερο βήμα: Έστω ότι για κάθε $\ ,\ 1 < \ < i \leq n$, ισχύει $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi_k$. Θα δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi_i$. Διακρίνουμε πάλι δυο περιπτώσεις.
α) $\psi_i \in A_0 \cup T \cup \{\varphi\}$.
Τότε παίρνουμε το ζητούμενο όπως πριν.
β) ο ψ_i είναι άμεση συνέπεια των ψ_j, $\psi_l = \psi_j \to \psi_i$, $j, l < i$, βάσει του κανόνα $M.P.$
Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, έχουμε ότι

$$T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi_j \quad \text{και} \quad T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to (\psi_j \to \psi_i).$$

Κατασκευάζουμε τώρα μια τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}_0$ από το T ως εξής:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & ..... \\ .. & ..... \\ \lambda. & \varphi \to \psi_j \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη από το } T \text{ στο } \mathcal{A}_0$$

$$\left.\begin{array}{ll} .. & ..... \\ .. & ..... \\ \mu. & \varphi \to (\psi_j \to \psi_i) \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη από το } T \text{ στο } \mathcal{A}_0$$

$$\begin{array}{lll} \mu+1. & (\varphi \to (\psi_j \to \psi_i)) \to ((\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi_i)) & A\Sigma 2 \\ \mu+2. & (\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi_i) & \mu,\ \mu+1,\ M.P. \\ \mu+3. & \varphi \to \psi_i & \lambda,\ \mu+2,\ M.P. \end{array}$$

Συνεπώς $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi_i$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

Παρατήρηση. Το θεώρημα απαγωγής (μέσω της κύριας ερμηνείας της Γ_0) μιλά για την εξής τεχνική απόδειξης:
Όταν από τις υποθέσεις Y προσπαθούμε ν' αποδείξουμε ότι $A \Rightarrow B$, προσπαθούμε ν' αποδείξουμε το B με υποθέσεις $Y \cup \{A\}$.

Πόρισμα 2.4.1 *1)* $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \chi$.
2) $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \chi$.

Απόδειξη 1) Αρκεί, σύμφωνα με το θεώρημα απαγωγής, να δείξουμε ότι

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \chi.$$

Αυτό όμως το εξασφαλίζει η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\varphi \to \psi$	υπόθεση
2.	$\psi \to \chi$	υπόθεση
3.	φ	υπόθεση
4.	ψ	1, 3, M.P.
5.	χ	2, 4, M.P.

2) Όμοια.

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα που αποδείξαμε για συντόμευση τυπικών αποδείξεων στο $\mathcal{A}_0$. Παραδείγματος χάρη, αν κατά την κατασκευή κάποιας τυπικής απόδειξης έχουμε ήδη γράψει τους τύπους $\varphi \to \psi$, $\psi \to \chi$, τότε μπορούμε να γράψουμε τον $\varphi \to \chi$ με δικαιολογία "Πόρισμα 2.4.1", αντί να επαναλάβουμε την αντίστοιχη τυπική απόδειξη.

Το επόμενο θεώρημα θα μας φανεί πολύ χρήσιμο αργότερα.

Θεώρημα 2.4.2 *Οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα του* $\mathcal{A}_0$ *(για κάθε* φ, ψ*):*

1) $\neg\neg\varphi \to \varphi$
2) $\varphi \to \neg\neg\varphi$
3) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
4) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
5) $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
6) $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$
7) $\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$
8) $(\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$
9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$.

Απόδειξη: Άσκηση 18.

Ένα άλλο σημαντικό πόρισμα του Θεωρήματος Απαγωγής είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 2.4.3 (Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής) *Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων* T *και τυχόντες προτασιακούς τύπους* φ, ψ*:*

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\psi \ \text{ ανν } \ T \cup \{\psi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\varphi.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\psi$. Τότε, λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής, $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \neg\psi$. Η ακόλουθη τυπική απόδειξη μας δείχνει ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \psi \to \neg\varphi$:

$$\begin{array}{lll} \left.\begin{array}{ll} 1. & \ldots.. \\ .. & \ldots.. \\ \lambda. & \varphi \to \neg\psi \end{array}\right\} & \text{τυπική απόδειξη στο } \mathcal{A}_0 & \\ \lambda+1. & (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi) & \text{Θεώρημα 2.4.2, 6)} \\ \lambda+2. & \psi \to \neg\varphi & \lambda, \lambda+1, M.P. \end{array}$$

Πάλι με βάση το Θεώρημα Απαγωγής έχουμε ότι $T \cup \{\psi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\varphi$.
($\Leftarrow$) Όμοια.

Συνεχίζουμε με ένα θεώρημα που αντιστοιχεί στη μέθοδο της 'σε άτοπο απαγωγής', η οποία χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην κατασκευή αποδείξεων. Πριν δούμε το θεώρημα, θα ορίσουμε μια νέα έννοια.

Ορισμός 2.4.3 *Έστω T σύνολο προτασιακών τύπων. Θα λέμε ότι*
α) το T είναι 'συνεπές' ανν δεν υπάρχει προτασιακός τύπος φ τέτοιος που $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$ και $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\varphi$
β) το T είναι 'αντιφατικό' ανν το T δεν είναι συνεπές.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν το T είναι αντιφατικό, τότε $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \psi$ για κάθε τύπο ψ. Πράγματι, έστω ότι για κάποιο τύπο φ ισχύει ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$ και $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\varphi$. Τότε, χρησιμοποιώντας το τυπικό θεώρημα $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ (δες Θεώρημα 2.4.2, 3)), μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη του ψ από το T, για τυχόντα τύπο ψ.

Θεώρημα 2.4.4 (Θεώρημα της σε άτοπο απαγωγής) *Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T και για κάθε προτασιακό τύπο φ:*

$$\text{αν το } T \cup \{\varphi\} \text{ είναι αντιφατικό, τότε } T \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\varphi.$$

Απόδειξη. Έστω ότι το $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό. Τότε για κάποιο ψ:

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \psi \text{ και } T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\psi.$$

Άρα, λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής,

$$T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \psi \text{ και } T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \neg\psi.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το τυπικό θεώρημα $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$ (Θεώρημα 2.4.2, 9)), μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}_0$ που δείχνει ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\varphi$.

Δε θα συνεχίσουμε τη μελέτη του $\mathcal{A}_0$, για τους εξής λόγους:

α) Το $\mathcal{A}_0$ δεν αποτελεί το κατάλληλο υπόβαθρο για την μελέτη μαθηματικών αποδείξεων, αφού η Γ_0 έχει περιορισμένες εκφραστικές δυνατότητες.

β) Υπάρχει ευκολότερος τρόπος από την κατασκευή τυπικών αποδείξεων στο $\mathcal{A}_0$ για να ελέγχουμε αν κάποιος προτασιακός τύπος είναι τυπικό θεώρημα του $\mathcal{A}_0$, δηλαδή ο έλεγχος αν αυτός ο τύπος είναι ταυτολογία - το γεγονός αυτό έπεται από θεωρήματα που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο.

Θα κλείσουμε την παράγραφο αναφέροντας τα σύνολα αξιωμάτων A_0', A_0'', κάθε ένα από τα οποία μπορούμε να πάρουμε στην θέση του A_0 χωρίς ν' αλλάξει τίποτε, δηλ. τα συστήματα $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0' =< A_0', K_0 >$ και $\mathcal{A}_0'' =< A_0'', K_0 >$ έχουν τα ίδια θεωρήματα.
Τα στοιχεία του A_0' είναι όλοι οι προτασιακοί τύποι που δίνουν τα ακόλουθα αξιωματικά σχήματα:

$$\begin{array}{l} \varphi \vee \varphi \to \varphi \\ \varphi \to \varphi \vee \psi \\ \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi \\ (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \varphi \vee \chi). \end{array}$$

Το A_0'' έχει στοιχεία όλους τους προτασιακούς τύπους της μορφής

$$(\{[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\} \to \tau) \to [(\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)].$$

2.5 Εγκυρότητα και πληρότητα

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι το αξιωματικό σύστημα $\mathcal{A}_0$ είναι 'έγκυρο', δηλαδή κάθε τυπικό θεώρημά του είναι ταυτολογία, και 'πλήρες', δηλαδή κάθε ταυτολογία είναι τυπικό θεώρημά του. Μ' άλλα λόγια, το να συμπεραίνουμε προτασιακούς τύπους από άλλους 'συντακτικά' είναι το ίδιο πράγμα με το να τους συμπεραίνουμε 'σημασιολογικά'.
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγράφου 2.3, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στους προτασιακούς τύπους εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \to$ (προφανώς η αρχή της επαγωγής ισχύει με την κατάλληλη τροποποίηση).
Για ν' αποδείξουμε το βασικό θεώρημα, χρειαζόμαστε το εξής

Λήμμα 2.5.1 *Δεδομένης μιας αποτίμησης a, ορίζουμε τη συνάρτηση $\overline{}^a : T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$ ως εξής:*

$$\overline{\varphi}^a = \begin{cases} \varphi, & \alpha\nu\ \overline{a}(\varphi) = A \\ \neg\varphi, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Για κάθε προτασιακό τύπο φ και κάθε αποτίμηση a ισχύει

$$\{\overline{p_0}^a, ..., \overline{p_k}^a\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \overline{\varphi}^a,$$

όπου $\in \mathbf{N}$ *τέτοιο που όλες οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στο φ είναι ανάμεσα στις $p_0, ..., p_k$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής. Για ευκολία, γράφουμε $^-$ αντί για $^{-a}$.

1) Αν ο φ είναι κάποια προτασιακή μεταβλητή, τότε το ζητούμενο ισχύει προφανώς.

2) Έστω λοιπόν ότι το ζητούμενο ισχύει για τους φ, ψ. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τους $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$.

α) Προφανώς οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στους φ, $\neg\varphi$ είναι οι ίδιες, έστω ότι είναι μεταξύ των p_0, ..., p_k. Θεωρούμε μια αποτίμηση a. από την επαγωγική υπόθεση, ισχύει $\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \overline{\varphi}$.
Αν $\overline{a}(\varphi) = A$, τότε $\overline{a}(\neg\varphi) = \Psi$, οπότε $\overline{\neg\varphi} = \neg\neg\varphi$. Αλλά $\vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to \neg\neg\varphi$, από το Θεώρημα 2.4.2. Συνεπώς $\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \overline{\neg\varphi}$.
Αν $\overline{a}(\varphi) = \Psi$, τότε $\overline{a}(\neg\varphi) = A$, οπότε $\overline{\varphi} = \neg\varphi$ και $\overline{\neg\varphi} = \neg\varphi$. Άρα $\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \overline{\neg\varphi}$.
Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει για τον $\neg\varphi$ αυτό που θέλουμε.

β) Ας υποθέσουμε ότι οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ είναι μεταξύ των $p_0, ..., p_k$ και αυτές που εμφανίζονται στον ψ είναι μεταξύ των $p_0, ..., p_l$, όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ισχύει $\leq l$. Προφανώς οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον $\varphi \to \psi$ είναι μεταξύ των $p_0, ..., p_l$. Θεωρούμε μια αποτίμηση a. Από την επαγωγική υπόθεση, ισχύουν οι

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \overline{\varphi} \quad (1)$$
$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_l}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \overline{\psi} \quad (2).$$

Λόγω της παρατήρησης 4) στη σελίδα 25, από την (1) έπεται η

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_l}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \overline{\varphi} \quad (3).$$

Αν $\overline{a}(\varphi \to \psi) = \Psi$, οπότε $\overline{a}(\varphi) = A$ και $\overline{a}(\psi) = \Psi$, θα έχουμε

$$\overline{\varphi \to \psi} = \neg(\varphi \to \psi),\ \overline{\varphi} = \varphi \text{ και } \overline{\psi} = \neg\psi \quad (4).$$

Όμως από το 7) του Θεωρήματος 2.4.2, έχουμε ότι

$$\vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)) \ \ (5).$$

Από τις (2), (3), (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_l}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \overline{\varphi \to \psi},$$

δηλαδή ότι ισχύει το ζητούμενο.
Αν $\overline{a}(\varphi \to \psi) = A$, οπότε $\overline{a}(\varphi) = \Psi$ ή $\overline{a}(\psi) = A$, θα έχουμε

$$\overline{\varphi \to \psi} = \varphi \to \psi, \ \overline{\varphi} = \neg\varphi \text{ ή } \overline{\psi} = \psi \ \ (6).$$

Αν ισχύει $\overline{a}(\varphi) = \Psi$, τότε το ζητούμενο έπεται από τις (3), (6) και το γεγονός ότι $\vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ (δες 3) Θεωρήματος 2.4.2).
Αν ισχύει $\overline{a}(\psi) = A$, τότε το ζητούμενο έπεται από τις (2), (6) και το γεγονός ότι $\vdash_{\mathcal{A}_0} \psi \to (\varphi \to \psi)$ (δες $A\Sigma 1$).

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει το ζητούμενο.

Τώρα έχουμε ό,τι χρειάζεται για ν' αποδείξουμε το βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.1 (Θεώρημα Πληρότητας Προτασιακού Λογισμού) *Για κάθε προτασιακό τύπο* φ,

$$\textit{αν} \models \varphi, \ \textit{τότε} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi.$$

Απόδειξη. Έστω τώρα ότι $\models \varphi$ και οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στο φ είναι ανάμεσα στις $p_0, ..., p_k$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\ \ > 0$.
Για τυχούσα αποτίμηση a, λόγω του προηγούμενου Λήμματος, ισχύει:

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi \ \ (\text{αφού } \overline{a}(\varphi) = A).$$

Αν a_1 είναι μια αποτίμηση τέτοια που $a_1(p_k) = A$, τότε

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}, p_k\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi.$$

Παίρνοντας μια αποτίμηση α_2 τέτοια που $a_2(p_k) = \Psi$ και $a_2(p_i) = a_1(p_i)$ για $i = 0, ..., \ \ - 1$, έχουμε

$$\{\overline{p_1}, ..., \overline{p_{k-1}}, \neg p_k\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Απαγωγής,

$$\begin{array}{ll} \{\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} p_k \to \varphi & \quad \text{και} \\ \{\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \neg p_k \to \varphi. & \end{array}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα (πώς;) το 8) του Θεωρήματος 2.4.2 έχουμε ότι

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}\} \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi.$$

Συνεχίζοντας έτσι, απαλείφουμε όλους τους προτασιακούς τύπους $\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}$ και συμπεραίνουμε ότι $\vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$.

Γενικότερα, αποδεικνύεται το εξής, το οποίο επίσης καλούμε 'Θεώρημα Πληρότητας Προτασιακού Λογισμού'.

Θεώρημα 2.5.2 *Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T και κάθε προτασιακό τύπο φ:*

$$\textit{αν } T \models \varphi, \textit{ τότε } T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi.$$

Όπως προαναφέραμε, ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος Πληρότητας, δηλαδή το εξής:

Θεώρημα 2.5.3 (Θεώρημα Εγκυρότητας Προτασιακού Λογισμού) *Για κάθε προτασιακό τύπο φ:*

$$\textit{αν } \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi, \textit{ τότε } \models \varphi.$$

Το ανωτέρω θεώρημα εξασφαλίζει ότι το A_0 δεν είναι αντιφατικό. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κάποιος προτασιακός τύπος φ τέτοιος που $\vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$ και $\vdash_{\mathcal{A}_0} \neg\varphi$. Τότε θα ίσχυε $\models \varphi$ και $\models \neg\varphi$, πράγμα αδύνατο.

Θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα, το οποίο επίσης καλούμε 'Θεώρημα Εγκυρότητας Προτασιακού Λογισμού':

Θεώρημα 2.5.4 *Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T και κάθε προτασιακό τύπο φ:*

$$\textit{αν } T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi, \textit{ τότε } T \models \varphi.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$. Τότε υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi$ στο $\mathcal{A}_0$. Όπως θα δούμε στην Άσκηση 19, κάθε αξίωμα του $\mathcal{A}_0$ είναι ταυτολογία και ο κανόνας $M.P.$ διατηρεί την ταυτολογική συνεπαγωγή. Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό, μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι $T \models \varphi_i$, για κάθε $i = 1, ..., n$. Άρα $T \models \varphi_n$, δηλαδή $T \models \varphi$.

Ως πόρισμα των Θεωρημάτων Πληρότητας και Εγκυρότητας έχουμε το Θεώρημα Συμπάγειας που αναφέραμε, με απόδειξη την εξής:
Έστω ότι T είναι ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων τέτοιο που κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο, αλλά το ίδιο το T δεν είναι ικανοποιήσιμο. Τότε $T \models p_0 \wedge \neg p_0$ (παρατήρηση μετά τον Ορισμό 2.2.2).

Άρα $T \vdash_{\mathcal{A}_0} p_0 \wedge \neg p_0$ (Θεώρημα Πληρότητας), οπότε υπάρχει κάποιο πεπερασμένο $T' \subseteq T$ τέτοιο που $T' \vdash_{\mathcal{A}_0} p_0 \wedge \neg p_0$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Εγκυρότητας, θα ισχύει $T' \models p_0 \wedge \neg p_0$, που είναι αδύνατο, αφού το T' είναι ικανοποιήσιμο.

Λόγω των Θεωρημάτων Πληρότητας και Εγκυρότητας, υπάρχει αλγόριθμος για ν' αποφασίζουμε αν ο φ αποδεικνύεται τυπικά ή όχι στο $\mathcal{A}_0$ από ένα πεπερασμένο σύνολο $T \subseteq T(\Gamma_0)$: ο αλγόριθμος για ν' αποφασίζουμε αν $T \models \varphi$ ή όχι.
Στην κατηγορηματική λογική, όπως θα δούμε στην συνέχεια, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά, παρ' όλο που και εκεί ισχύει το θεώρημα πληρότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν προτασιακοί τύποι με αριθμό συμβόλων 2, 3 ή 6, αλλά ότι οποιοσδήποτε άλλος φυσικός αριθμός > 0 είναι δυνατός.

2. Έστω φ προτασιακός τύπος, n ο αριθμός διθέσιων συνδέσμων και m ο αριθμός προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται στο φ (αν ένα σύμβολο εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές, μετράμε ξεχωριστά κάθε εμφάνιση). Αποδείξτε ότι $m = n + 1$.

3. Αποδείξτε ότι η έκφραση $(p_1 \to \wedge p_0)$ δεν είναι προτασιακός τύπος.

4. Δείξτε ότι κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου δεν είναι προτασιακός τύπος.

5. Βρείτε τα δενδροδιαγράμματα των προτασιακών τύπων

$$[(p_1 \wedge p_0) \to ((\neg p_2) \vee (p_3 \leftrightarrow p_1))],\ (p_1 \vee (p_2 \leftrightarrow p_0)),$$
$$[((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \to p_0].$$

6. Έστω $f, g : T(\Gamma_0) \to \mathbf{N}$ οι συναρτήσεις που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} f(p) = 0 & g(p) = 0 \\ f(\neg\varphi) = f(\varphi) + 1 & g(\neg\varphi) = g(\varphi) + 1 \\ f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) + f(\psi) + 1 & g(\varphi \wedge \psi) = max(g(\varphi), g(\psi)) + 1 \end{array}$$

και όμοια με $\vee, \to, \leftrightarrow$ αντί για $\wedge$.
α) Βρείτε τους αριθμούς

$$f((p_1 \to p_2) \wedge (\neg p_2 \to p_0)),\ g((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4))).$$

β) Δείξτε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει: $g(\varphi) \leq f(\varphi)$.

7. Αποδείξτε την Πρόταση 2.1.1.

8. Εξετάστε αν ο καθένας από τους κατωτέρω προτασιακούς τύπους συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο:

$$p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2),\ (p_0 \wedge (p_1 \wedge p_2)) \vee (\neg p_0 \wedge (\neg p_1 \wedge \neg p_2)).$$

9. Είναι ο προτασιακός τύπος $((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0$ ταυτολογία;

10. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$, $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ έχουμε
    α) $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ανν $\Sigma \models \varphi \to \psi$
    β) $\varphi \equiv \psi$ ανν $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

11. Έστω $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...$ ακολουθία προτασιακών τύπων. Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ, συμβολίζουμε με φ^* τον προτασιακό τύπο που παίρνουμε αντικαθιστώντας την p_0 με φ_0, την p_1 με φ_1, την p_2 με φ_2 κτλ.

    α) Έστω a μια αποτίμηση. Παίρνουμε μια αποτίμηση b τέτοια που $b(p_i) = \overline{a}(\varphi_i)$ για $i = 0, 1, 2, ...$ Δείξτε ότι $\overline{b}(\varphi) = \overline{a}(\varphi^*)$.

    β) Δείξτε ότι αν ο φ είναι ταυτολογία, τότε ο φ^* είναι ταυτολογία.

12. Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ ορίζουμε αναδρομικά το σύνολο των "υποπροτασιακών τύπων του φ", συμβολικά Υπο(φ), ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\text{Υπο}(p) = \{p\}\\
&\text{Υπο}(\neg\varphi) = \text{Υπο}(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}\\
&\text{Υπο}(\varphi \wedge \psi) = \text{Υπο}(\varphi) \cup \text{Υπο}(\psi) \cup \{\varphi \wedge \psi\}
\end{aligned}$$

    και όμοια για $\vee, \to, \leftrightarrow$ στην θέση του $\wedge$.
    Έστω τώρα φ, ψ, χ προτασιακοί τύποι με $\chi \in$ Υπο(φ). Ορίζουμε τον προτασιακό τύπο $\varphi[\chi/\psi]$ να είναι ο τύπος που προκύπτει από τον φ αν αντικαταστήσουμε τον χ, όπου εμφανίζεται στον φ, με τον ψ. Δείξτε ότι αν $\chi \equiv \psi$, τότε $\varphi \equiv \varphi[\chi/\psi]$.

13. Για ένα φόνο υπάρχουν τρεις ύποπτοι, οι A, B, Γ. Στην ανάκριση δηλώνουν:

    A: Δεν έκανα τον φόνο. Το θύμα ήταν παλιός γνώριμος του B. Επίσης ο Γ τον μισούσε.

Β: Δεν έκανα τον φόνο. Ούτε καν ήξερα το θύμα. Εκτός αυτού, έλειπα από την πόλη την ημέρα του φόνου.

Γ: Δεν έκανα τον φόνο. Είδα τον Α και τον Β με το θύμα την ημέρα του φόνου. Ένας απ' αυτούς πρέπει να το έκανε.

Ξέροντας ότι ένας από τους τρεις έκανε τον φόνο και ότι οι δυο αθώοι λένε αλήθεια, βρείτε ποιός είναι ο δολοφόνος.

14. Αποδείξτε την ακόλουθη <u>Αρχή του Δυϊσμού</u>:
Έστω ότι στον φ εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \vee, \wedge$. Εστω φ^* ο προτασιακός τύπος που παίρνουμε από τον φ εναλλάσσοντας τα $\wedge, \vee$ και αντικαθιστώντας κάθε προτασιακή μεταβλητή με την άρνησή της. Δείξτε ότι $\neg\varphi \equiv \varphi^*$.

15. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του προτασιακού λογισμού και την Άσκηση 12, απλοποιείστε τους ακόλουθους προτασιακούς τύπους:

$$[p_1 \wedge ((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2))] \vee \neg(p_3 \vee \neg p_1),$$
$$(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi),$$
$$[(\varphi \vee \psi) \wedge (\psi \to \varphi)] \vee [(\psi \wedge \chi) \vee \neg(\psi \to \chi)].$$

16. Ένας φυλακισμένος που έχει καταδικαστεί σε θάνατο είναι υποχρεωμένος να κάνει μια δήλωση. Αν η δήλωση είναι αληθής, θα απαγχονιστεί· αν η δήλωση είναι ψευδής, θα εκτελεστεί με τουφεκισμό. Ποια δήλωση θάπρεπε να κάνει ώστε να μπερδέψει τους εκτελεστές του;

17. Ποιά από τα ακόλουθα σύνολα είναι ικανοποιήσιμα και γιατί;

$$M(\Gamma_0),\ T(\Gamma_0),\ \{p_0, p_0 \to p_1, \neg p_1\},\ \{p_i \to p_{i+1} : i \in \mathbf{N}\}.$$

18. Κατασκευάζοντας τυπικές αποδείξεις, δείξτε ότι οι προτασιακοί τύποι του Θεωρήματος 2.4.2 είναι τυπικά θεωρήματα του $\mathcal{A}_0$.

19. Ελέγξτε ότι τα αξιώματα του $\mathcal{A}_0$ είναι ταυτολογίες και ότι ο κανόνας $M.P.$ διατηρεί την ταυτολογική συνεπαγωγή.

20. Δείξτε ότι οι προτασιακοί τύποι

$$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to \chi,\ [\varphi \to (\psi \to \chi)] \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \chi)$$

είναι τυπικά θεωρήματα του $\mathcal{A}_0$.

21. Έστω f η συνάρτηση Boole που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{lll} f(\Psi,\Psi,\Psi)=A & f(\Psi,A,A)=\Psi & f(A,A,\Psi)=\Psi \\ f(\Psi,\Psi,A)=A & f(A,\Psi,\Psi)=A & f(A,A,A)=\Psi \\ f(\Psi,A,\Psi)=A & f(A,\Psi,A)=\Psi. & \end{array}$$

Βρείτε ένα προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή που πραγματοποιεί την f. Υπάρχει σύντομος τέτοιος προτασιακός τύπος;

22. Βρείτε τους πίνακες αλήθειας των 9 δυνατών συνδέσμων που δεν έχουμε αναφέρει.

23. Αποδείξτε ότι τα $\{\downarrow\}$, $\{\neg,\to\}$ είναι πλήρη.

24. Δείξτε ότι το $\{+,\leftrightarrow\}$ δεν είναι πλήρες.

25. Γράψτε τους ακόλουθους προτασιακούς τύπους σε κανονική διαζευκτική μορφή:

$$\neg(p_1\to p_2)\vee(\neg p_1\wedge p_3),\;\; p_0\to((p_2\to\neg p_0)\vee p_3).$$

26. α) Δείξτε ότι για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T:

$$T \text{ συνεπές ανν } T \text{ ικανοποιήσιμο.}$$

β) Είναι το $\{\neg p_2\wedge p_3\to p_1, p_2\to(\neg p_1\to p_3), p_1\leftrightarrow\neg p_3\}$ συνεπές;

27. Αν $T,\Sigma\subseteq T(\Gamma_0)$, με $\overline{T}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{\varphi\in T(\Gamma_0) : T\vdash_{\mathcal{A}_0}\varphi\}$. Δείξτε ότι για τυχόντα $T,\Sigma\subseteq T(\Gamma_0)$ ισχύουν:

$$\begin{array}{ll} \text{α) } \overline{\overline{T}}=\overline{T} & \text{β) } \overline{T\cap\Sigma}\subseteq\overline{T}\cap\overline{\Sigma} \\ \text{γ) } \overline{T}\cup\overline{\Sigma}\subseteq\overline{T\cup\Sigma} & \text{δ) } T(\Gamma_0)-\overline{T}\subseteq\overline{T(\Gamma_0)-T}. \end{array}$$

Βρείτε παραδείγματα T,Σ για τα οποία έχουμε $\subset$ (γνήσιο υποσύνολο) στα β) – δ).

Κεφάλαιο 3

Κατηγορηματική Λογική

3.1 Πρωτοβάθμιες γλ σσες

Όπως προαναφέραμε, η γλώσσα Γ_0 έχει πολύ περιορισμένες εκφραστικές δυνατότητες και γι' αυτό είναι εύλογο να αναζητήσουμε άλλες, εκφραστικότερες, τυπικές γλώσσες. Με τα σύμβολα της Γ_0 δεν είχαμε τη δυνατότητα να διεισδύσουμε στο εσωτερικό προτάσεων της ελληνικής γλώσσας, πράγμα που είναι επιτακτικό, αν θέλουμε, παραδείγματος χάρη, να μιλήσουμε με ενιαίο τρόπο για σύνολα όμοιων περιπτώσεων. Έστω ότι θέλουμε να εκφράσουμε σε τυπική γλώσσα ότι "ο αριθμός a έχει την ιδιότητα A" και ότι "ο αριθμός b έχει την ιδιότητα A". Στα πλαίσια της Γ_0 αυτό μπορεί να γίνει μέσω δυο διακεκριμένων προτασιακών μεταβλητών, ας πούμε της p_0 και της p_1, πράγμα που οδηγεί στην απώλεια της πληροφορίας ότι αναφερόμαστε στους αριθμούς a, b σε σχέση με την ίδια ιδιότητα A. Αν όμως υπάρχει στην τυπική γλώσσα ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει την ιδιότητα A, θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τις δυο προτάσεις με τρόπο που να αναδεικνύει το κοινό μέρος τους. Παραδείγματος χάρη, αν το σύμβολο P_A αντιστοιχεί στην A, οι προτάσεις μπορούν να μεταγραφούν ως $P_A(a)$ και $P_A(b)$ αντίστοιχα. Οι αποκαλούμενες *πρωτοβάθμιες γλώσσες* είναι τυπικές γλώσσες που προσφέρουν αυτές τις δυνατότητες. Τέτοιες γλώσσες χρησιμοποιούνται για την κατασκευή αξιωματικών συστημάτων για την μελέτη κομματιών των Μαθηματικών, π.χ. της Θεωρίας Συνόλων, της Θεωρίας Αριθμών κτλ.

Τα σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας είναι τα εξής:

α) $v_0, v_1, v_2, ...$, που καλούνται 'μεταβλητές'

β) $\neg, \rightarrow$, που καλούνται 'σύνδεσμοι' (αντίστοιχα 'άρνηση', 'συνεπαγωγή') γ) (,), που καλούνται 'παρενθέσεις' (αντίστοιχα 'αριστερή παρένθεση', 'δεξιά παρένθεση')

δ) $\approx$, που καλείται 'ισότητα'

ε) $\forall$, που καλείται 'καθολικός ποσοδείκτης'

ζ) για κάθε $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{P_{ni} | i \in I_n\}$, τα στοιχεία του οποίου καλούνται 'n-μελή κατηγορηματικά σύμβολα'

η) για κάθε $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{f_{nj} | j \in J_n\}$, τα στοιχεία του οποίου καλούνται 'n-θέσια συναρτησιακά σύμβολα'

θ) ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{c_k| \quad \in K\}$, τα στοιχεία του οποίου καλούνται '(ατομικές) σταθερές'.

Το σύνολο των συμβόλων της Γ_1 συμβολίζουμε με $\Sigma(\Gamma_1)$, των σταθερών με $\Sigma\tau(\Gamma_1)$ και των μεταβλητών με $M(\Gamma_1)$.
Χρησιμοποιούμε τις εξής συντακτικές μεταβλητές:

$x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$	με τιμές μεταβλητές
$P, Q, R, \ldots$	με τιμές κατηγορηματικά σύμβολα
$f, g, h, \ldots$	με τιμές συναρτησιακά σύμβολα
$c, d, e, \ldots$	με τιμές σταθερές.

Παρατηρήσεις. 1) Τα σύμβολα των κατηγοριών β) - ε) καλούνται 'λογικά σύμβολα', διότι έχουν πάντα το ίδιο νόημα, που στηρίζεται στη διαισθητική Λογική, ενώ εκείνα των ζ) - θ) καλούνται 'μη λογικά σύμβολα', διότι μπορούν να ερμηνευθούν με διάφορους τρόπους. Τα σύμβολα των κατηγοριών α) - ε) είναι κοινά σ' όλες τις πρωτοβάθμιες γλώσσες.
2) Μερικοί συγγραφείς περιλαμβάνουν το σύμβολο $\approx$ στα μη λογικά σύμβολα, αυτό όμως δεν επιφέρει ουσιαστικές διαφορές στην ανάπτυξη της κατηγορηματικής λογικής. Επίσης μερικοί συγγραφείς θεωρούν τα σύμβολα σταθερών ως 0-θέσια συναρτησιακά σύμβολα.
3) Θα μπορούσαμε να επιτρέψουμε την ύπαρξη 0-θέσιων κατηγορηματικών συμβόλων, τα οποία θα αντιστοιχούσαν στις προτασιακές μεταβλητές της Γ_0. Έτσι θα επιτυγχάναμε ενσωμάτωση της προτασιακής λογικής στην κατηγορηματική λογική – θα έπρεπε βέβαια να κάνουμε κατάλληλες τροποποιήσεις σε ό,τι ακολουθεί, κυρίως στους Ορισμούς 3.1.5 και 3.1.7.
4) Όπως για τη Γ_0, θα χρησιμοποιούμε [,] και {, } αντί για (,).
5) Υποθέτουμε ότι κάθε πρωτοβάθμια γλώσσα έχει τουλάχιστον ένα κατηγορηματικό ή συναρτησιακό σύμβολο.
6) Αργότερα θα εισαγάγουμε τα σύμβολα $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists$. Ο λόγος που δεν είναι

απαραίτητη η παρουσία τους από την αρχή είναι ότι το σύνολο $\{\neg, \rightarrow, \forall\}$ είναι πλήρες (υποτίθεται ότι έχουμε επεκτείνει την έννοια της πληρότητας ώστε να εφαρμόζεται σε σύνολα με στοιχεία συνδέσμους και ποσοδείκτες).

Προφανώς μια πρωτοβάθμια γλώσσα είναι καθορισμένη όταν είναι καθορισμένα τα μη λογικά της σύμβολα. Συνήθως οι πρωτοβάθμιες γλώσσες που μας ενδιαφέρουν έχουν πεπερασμένα στο πλήθος σύμβολα των κατηγοριών ζ) - θ).

Παραδείγματα. α) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\kappa\lambda}$ της κατηγορηματικής λογικής έχει μόνο κατηγορηματικά σύμβολα P_{nm}, με $n, m \in \mathbf{N} - \{0\}$, και σταθερές $c_1, c_2, c_3, ...$.
β) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ της θεωρίας συνόλων έχει μόνο ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο, το $\in$. (Μερικοί συγγραφείς προτιμούν η $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ να έχει και ένα σύμβολο σταθεράς $\emptyset$.)
γ) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ της θεωρίας αριθμών έχει ένα μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο $'$, δυο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $\oplus, \odot$ και μια σταθερά $\mathbf{0}$. (Μερικοί συγγραφείς προτιμούν η $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ να έχει και ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $\prec$.)

Στη συνέχεια θα μιλάμε γενικά για μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1, εκτός αν αναφέρουμε μια συγκεκριμένη.

Ορισμός 3.1.1 *''Έκφραση' της Γ_1 καλείται κάθε πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολά της, π.χ. $\forall x_0 \approx x_0 x_1$, $(x_1 \rightarrow \neg$.*

Το σύνολο των εκφράσεων της Γ_1 συμβολίζουμε με $E(\Gamma_1)$ και χρησιμοποιούμε τα $\alpha, \beta, \gamma, ...$ ως συντακτικές μεταβλητές με τιμές στο $E(\Gamma_1)$.

Ας δούμε τώρα ποιές εκφράσεις της Γ_1 θα είναι φορείς νοήματος. Οι σχετικοί ορισμοί θα γίνουν αναδρομικά, όπως για τη Γ_0.

Ορισμός 3.1.2 *Θα λέμε ότι η έκφραση α είναι 'όρος' ανν*

1) $\alpha \in M(\Gamma_1) \cup \Sigma\tau(\Gamma_1)$ ή

2) η α είναι της μορφής $f\beta_1...\beta_n$, όπου f είναι n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και $\beta_1, ..., \beta_n$ είναι ήδη κατασκευασμένοι όροι.

Να μερικοί όροι της Γ_1: c_k, v_3, $f_{2i}v_1v_5$, $f_{2j}f_{2i}v_1v_1c_k$.
Το σύνολο των όρων της Γ_1 συμβολίζουμε με $O(\Gamma_1)$. Τα $t, r, s, ...$ χρησιμοποιούνται ως συντακτικές μεταβλητές με τιμές στο $O(\Gamma_1)$.
Για ευκολία, θα γράφουμε $f(t_1, ..., t_n)$ αντί για $ft_1...t_n$.

Ορισμός 3.1.3 *Θα λέμε ότι η έκφραση α είναι 'τύπος' ανν η α είναι της μορφής*

1) $\approx t_1t_2$ *ή*

2) $Pt_1...t_n$*, όπου* P *είναι* n*-μελές κατηγορηματικό σύμβολο, ή*

3) $(\neg\beta)$ *ή* $(\beta \to \gamma)$ *ή* $\forall x\beta$*, όπου* β, γ *ήδη κατασκευασμένοι τύποι.*

Ένας τύπος καλείται 'ατομικός' ανν είναι της μορφής 1) ή 2).

Να μερικοί τύποι της Γ_1: $\approx c_k f_{2j} v_1 v_5$, $(\neg(\approx c_k v_1 \to P_{2i} c_k v_5)$.
Το σύνολο των ατομικών τύπων της Γ_1 συμβολίζουμε με $AT(\Gamma_1)$ και των τύπων με $T(\Gamma_1)$. Τα $\varphi, \psi, \chi, ...$ χρησιμοποιούνται ως συντακτικές μεταβλητές με τιμές στο $T(\Gamma_1)$.
Για ευκολία, θα γράφουμε $P(t_1, ..., t_n)$ αντί για $Pt_1...t_n$.

Μερικοί από τους τύπους της Γ_1 θα έχουν συγκεκριμένο νόημα, ενώ οι υπόλοιποι θα έχουν νόημα υπό προϋποθέσεις. Ο διαχωρισμός αυτός στηρίζεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1.4 *Θα λέμε ότι*

α) 'η x *εμφανίζεται ελεύθερη στον* φ*' ανν*

1) ο φ *είναι ατομικός και η* x *εμφανίζεται στο* φ *ή*

2) ο φ *είναι της μορφής* $(\neg\psi)$ *και η* x *εμφανίζεται ελεύθερη στον* ψ *ή*

3) ο φ *είναι της μορφής* $(\psi \to \chi)$ *και η* x *εμφανίζεται ελεύθερη στον* ψ *ή στο* χ *ή*

4) ο φ *είναι της μορφής* $\forall y\psi$*, όπου* $x \neq y$*, και η* x *εμφανίζεται ελεύθερη στον* ψ*.*

β) 'η x *είναι δεσμευμένη στον* φ*' ανν η* x *δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο* φ*.*

γ) ο φ *είναι 'πρόταση' ανν κάθε μεταβλητή είναι δεσμευμένη στο* φ*.*

Παραδείγματος χάρη, η x εμφανίζεται ελεύθερη στον $(\forall x Q(x) \to P(x))$, η y είναι δεσμευμένη στον $\forall y(P(y) \to \forall x Q(x))$ και ο $\forall x \forall y(\approx xy \to \approx yx)$ είναι πρόταση.
Το σύνολο όλων των προτάσεων της Γ_1 συμβολίζουμε με $\Pi(\Gamma_1)$.

Παρατήρηση. Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, μια μεταβλητή μπορεί να εμφανίζεται ελεύθερη σ' ένα τύπο και ταυτόχρονα να είναι δεσμευμένη σ' ένα υποτύπο του.

Σε αναλογία με την αρχή της επαγωγής του Κεφαλαίου 2 έχουμε την

Θεώρημα 3.1.1 (Αρχή της Επαγωγής) *α) Αν* $A \subseteq O(\Gamma_1)$ *τέτοιο που*

1) $M(\Gamma_1) \cup \Sigma\tau(\Gamma_1) \subseteq A$ *και*

2) $f(t_1, ..., t_n) \in A$, *για κάθε* n*-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο* f *και κάθε* $t_1, ..., t_n \in A$,

τότε $A = O(\Gamma_1)$.
β) Αν $A \subseteq T(\Gamma_1)$ *τέτοιο που*

1) $AT(\Gamma_1) \subseteq A$ *και*

2) $(\neg\psi) \in A$, $(\psi \to \chi) \in A$, $\forall x\psi \in A$, *για κάθε* $\psi, \chi \in A$ *και* $x \in M(\Gamma_1)$,

τότε $A = T(\Gamma_1)$.

Όπως στο Κεφάλαιο 2, μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε τύπος είναι μοναδικά αναγνώσιμος, δηλαδή κατασκευάζεται με βάση ένα μοναδικό δενδροδιάγραμμα από ατομικούς τύπους με τη βοήθεια των συμβόλων $\neg, \to, \forall$.

Για ευκολία, εισάγουμε τα σύμβολα $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists$ ως εξής:

Θα γράφουμε	$(\varphi \wedge \psi)$	αντί για	$(\neg(\varphi \to (\neg\psi)))$,
	$(\varphi \vee \psi)$	αντί για	$((\neg\varphi) \to \psi)$,
	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	αντί για	$((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$,
	δηλαδή	αντί για	$(\neg((\varphi \to \psi) \to (\neg(\psi \to \varphi))))$,
	$\exists x\varphi$	αντί για	$(\neg\forall x(\neg\varphi))$.

Επίσης για ευκολία και για λόγους παράδοσης θα γράφουμε

$t_1{\approx}t_2$ αντί για $\approx t_1 t_2$,	$t_1 \neq t_2$ αντί για $(\neg{\approx} t_1 t_2)$
$t_1{\in}t_2$ αντί για $\in t_1 t_2$,	$t_1 \notin t_2$ αντί για $(\neg{\in} t_1 t_2)$
t_1' αντί για $' t_1$,	$(t_1 \oplus t_2)$ αντί για $\oplus t_1 t_2$
$(t_1 \odot t_2)$ αντί για $\odot t_1 t_2$.	

Όπως στους προτασιακούς τύπους, έτσι και στους τύπους παραλείπουμε παρενθέσεις, σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

1) Οι εξωτερικές παρενθέσεις παραλείπονται.

2) Τα $\neg, \forall, \exists$ θεωρούνται ισχυρότερα από τα υπόλοιπα σύμβολα και τα $\wedge, \vee$ ισχυρότερα από τα $\to, \leftrightarrow$.

3) Τα $\wedge, \vee$ θεωρούνται ισοδύναμα μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει για τα $\to, \leftrightarrow$.

Επίσης παραλείπουμε και τις εξωτερικές παρενθέσεις όρων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$, όταν δεν υπάρχει περίπτωση παρανόησης.

Ας στραφούμε τώρα στη σημασιολογική πλευρά μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας. Διαφορετικές πρωτοβάθμιες γλώσσες έχουν διαφορετικές 'κύριες' ερμηνείες που συμφωνούν όμως όσον αφορά τα λογικά σύμβολα. Έτσι η κύρια ερμηνεία των λογικών συμβόλων και των μέσω αυτών οριζόμενων συμβόλων (δηλ. των $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists$) είναι η εξής:

α) Τα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ αντιστοιχούν στις εκφράσεις "δεν", "και", "ή" κτλ., όπως για την Γ_0.

β) Τα (,) αντιστοιχούν σε σημεία στίξεως, όπως για την Γ_0.

γ) Το $\approx$ αντιστοιχεί στην φράση "ισούται με".

δ) Τα $\forall, \exists$ αντιστοιχούν στις φράσεις "για κάθε", "υπάρχει".

Ας δούμε δυο παραδείγματα κύριας ερμηνείας των μη λογικών συμβόλων δυο πρωτοβάθμιων γλωσσών.
Παράδειγμα 1. Η κύρια ερμηνεία των μη λογικών συμβόλων της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ είναι η εξής:
α) Οι μεταβλητές αντιστοιχούν σε σύνολα και
β) Το $\in$ αντιστοιχεί στην φράση "ανήκει σε".
Μ' αυτή την ερμηνεία οι τύποι της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ αντιστοιχούν σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας που αφορούν την θεωρία συνόλων.
Παράδειγμα 2. Η κύρια ερμηνεία των μη λογικών συμβόλων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ είναι η εξής:
α) Οι μεταβλητές αντιστοιχούν σε φυσικούς αριθμούς,
β) Το $'$ αντιστοιχεί στην φράση "επόμενος του",
γ) Τα $\oplus, \odot$ αντιστοιχούν στις φράσεις "συν", "επί",
δ) Το $\mathbf{0}$ αντιστοιχεί στη φράση "μηδέν".
Μ' αυτή την ερμηνεία οι τύποι της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ αντιστοιχούν σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας που αφορούν τη θεωρία αριθμών. Παραδείγματος χάρη, αν οι x_1, x_2, x_3, x_4 αντιστοιχούν στους φυσικούς 4, 1, 2, 3, τότε ο τύπος $(x_1{+}x_2)'{\approx}x_3.x_4$ αντιστοιχεί στην πρόταση "ο επόμενος του 4 συν 1 ισούται με 2 επί 3" και η πρόταση $\forall x_1 \exists x_2 x_2{\approx}x_1'$ στην πρόταση "για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει φυσικός που ισούται με τον επόμενο του πρώτου".

Συνεχίζουμε με μερικά παραδείγματα μετάφρασης ελληνικών προτάσεων σε κατάλληλες τυπικές γλώσσες.
Παραδείγματα. α) Ας δούμε ποιός τύπος της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ αντιστοιχεί στην πρόταση "Για δυο τυχόντα σύνολα, το πρώτο ισούται με το δεύτερο ανν έχουν τα ίδια

στοιχεία".
Παρατηρούμε ότι η πρόταση αυτή έχει την ίδια σημασία με την "Για δυο τυχόντα σύνολα, το πρώτο ισούται με το δεύτερο ανν κάθε στοιχείο του πρώτου είναι και στοιχείο του δεύτερου και αντίστροφα".
Τελικά, αγνοώντας μερικά γραμματικά στοιχεία της πρότασης, βλέπουμε ότι ο τύπος που ζητάμε είναι ο εξής:

$$\forall x_1 \forall x_2 [x_1 \approx x_2 \leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \in x_1 \leftrightarrow x_3 \in x_2)].$$

β) Ο τύπος της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση "Κάθε φυσικός αριθμός διάφορος από το μηδέν ισούται με τον επόμενο κάποιου φυσικού αριθμού" είναι ο $\forall x_1 [x_1 \not\approx \mathbf{0} \rightarrow \exists x_2 x_1 \approx x_2']$.

Για να δούμε πώς γίνεται η απόδοση μιας τιμής αλήθειας σε κάθε πρόταση της Γ_1 χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.1.5 *Μια 'δομή' (ή 'ερμηνεία') $\mathcal{A}$ για την Γ_1 αποτελείται από τα εξής:*

α) ένα μη κενό σύνολο που καλείται 'σύμπαν' της $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $|\mathcal{A}|$ (– στο οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές)

β) για κάθε $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{P_{ni}^{\mathcal{A}} | i \in I_n\}$ από n-μελείς σχέσεις στο $|\mathcal{A}|$ (– στο σύμβολο P_{ni} αντιστοιχεί η σχέση $P_{ni}^{\mathcal{A}} \subseteq |\mathcal{A}|^n$)

γ) για κάθε $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{f_{nj}^{\mathcal{A}} | j \in J_n\}$ από συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $|\mathcal{A}|^n$ και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του $|\mathcal{A}|$ (– στο σύμβολο f_{nj} αντιστοιχεί η συνάρτηση $f_{nj}^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^n \rightarrow |\mathcal{A}|$) και

δ) ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{c_k^{\mathcal{A}} | \ \in K\}$ από στοιχεία του $|\mathcal{A}|$ (– στο σύμβολο c_k αντιστοιχεί το $c_k^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$).

Παρατήρηση. Οι γλώσσες που μελετάμε λέγονται 'πρωτοβάθμιες' γιατί έχουν μεταβλητές που οι τιμές τους είναι στοιχεία ενός συνόλου. Οι δευτεροβάθμιες γλώσσες έχουν μεταβλητές που οι τιμές τους είναι υποσύνολα κάποιου συνόλου κτλ.

Παραδείγματα. 1) Η δομή $\mathcal{N}_\sigma$ για τη $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{N}_\sigma| = \mathbf{N}$ και

β) στο $\in$ αντιστοιχεί η σχέση $\in^{\mathcal{N}_\sigma} = \{< m, n > \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} | m < n\}$.

2) Η δομή $\mathcal{N}_\sigma^*$ για τη $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{N}_\sigma^*| = \mathbf{N}$ και

β) στο $\in$ αντιστοιχεί η σχέση $\in^{\mathcal{N}_\sigma^*} = \{< m, n >\in \mathbf{N} \times \mathbf{N} | n < m\}$.

3) Η δομή $\mathcal{N}$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{N}| = \mathbf{N}$

β) στα $\prime, \oplus, \odot$ αντιστοιχούν οι συνήθεις συναρτήσεις του επομένου, της πρόσθεσης και του πολ/σμού στο $\mathbf{N}$

γ) στο $\mathbf{0}$ αντιστοιχεί το $0 \in \mathbf{N}$.

4) Η δομή $\mathcal{N}^*$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{N}^*| = \{-n | n \in \mathbf{N}\} \approx \mathbf{N}^*$

β) οι $\prime^{\mathcal{N}^*}, \oplus^{\mathcal{N}^*}, \odot^{\mathcal{N}^*}$ ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\prime^{\mathcal{N}^*}(-n) = -n - 1\\
&\oplus^{\mathcal{N}^*}(-m, -n) = -(m + n)\\
&\odot^{\mathcal{N}^*}(-m, -n) = -(m.n)
\end{aligned}$$

γ) στο $\mathbf{0}$ αντιστοιχεί το $0 \in \mathbf{N}^*$.

Μια δομή λοιπόν για τη Γ_1 είναι ένας κόσμος για τον οποίο εκφράζουν κάτι οι τύποι της Γ_1. Η απόδοση συνεπώς αλήθειας στους τύπους πρέπει να γίνει στα πλαίσια μιας δομής.

Ορισμός 3.1.6 *Έστω $\mathcal{A}$ μια δομή για την Γ_1.*

1) 'Αποτίμηση στην $\mathcal{A}$' είναι μια συνάρτηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathcal{A}|$. Επειδή το $O(\Gamma_1)$ ορίστηκε αναδρομικά, είναι εύκολο να δείξουμε ότι για κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\overline{v} : O(\Gamma_1) \to |\mathcal{A}|$ τέτοια που

α) $\overline{v}(x) = v(x)$ για κάθε μεταβλητή x

β) $\overline{v}(c) = c^{\mathcal{A}}$ για κάθε σύμβολο σταθεράς c

γ) $\overline{v}(f(t_1, ..., t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{v}(t_1), ..., \overline{v}(t_n))$ για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f και τυχόντες όρους $t_1, ..., t_n$.

2) Αν v είναι μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$, 'τιμή του t για τη v στην $\mathcal{A}$' καλείται το $\overline{v}(t) \in |\mathcal{A}|$.

3) Αν v είναι μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ και $a \in |\mathcal{A}|$, τότε $v(x|a)$ είναι η αποτίμηση που αντιστοιχεί το a στην x και συμφωνεί με τη v για όλες τις άλλες μεταβλητές.

Παραδείγματα. α) Ας θεωρήσουμε τη δομή $\mathcal{N}$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{N}$ τέτοια που $v(x_1) = 2$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = 1$. Τότε $\overline{v}(x_1 \oplus (x_2' \odot x_3)) = \overline{v}(x_1) + \overline{v}(x_2' \odot x_3) = v(x_1) + \overline{v}(x_2') \cdot \overline{v}(x_3) = v(x_1) + (\overline{v}(x_2) + 1) \cdot v(x_3) = 2 + (0 + 1) \cdot 1 = 3$.
β) Ας θεωρήσουμε τώρα τη δομή $\mathcal{N}^*$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{N}^*$ τέτοια που $v(x_1) = -1$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = -4$. Τότε $\overline{v}(x_2'' \odot (x_3 \oplus x_1)) = \overline{v}(x_2'') \odot^{\mathcal{N}^*} \overline{v}(x_3 \oplus x_1) = (\overline{v}(x_2'))'^{\mathcal{N}^*} \odot^{\mathcal{N}^*} (\overline{v}(x_3) \oplus^{\mathcal{N}^*} \overline{v}(x_1)) =$
$((\overline{v}(x_2))'^{\mathcal{N}^*})'^{\mathcal{N}^*} \odot^{\mathcal{N}^*} (v(x_3) \oplus^{\mathcal{N}^*} v(x_1)) = (0'^{\mathcal{N}^*})'^{\mathcal{N}^*} \odot^{\mathcal{N}^*} ((-4) \oplus^{\mathcal{N}^*} (-1)) =$
$(-1)'^{\mathcal{N}^*} \odot^{\mathcal{N}^*} (-5) = (-2) \odot^{\mathcal{N}^*} (-5) = -10$.

Ορισμός 3.1.7 *(Tarski) Έστω $\mathcal{A}$ δομή για την Γ_1, φ τύπος, T σύνολο τύπων και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Θα λέμε ότι*

1) ο φ 'αληθεύει για τη v στην $\mathcal{A}$', και θα γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, ανν

α) $\overline{v}(t_1) \approx \overline{v}(t_2)$, αν ο φ είναι της μορφής $t_1 \approx t_2$

β) $< \overline{v}(t_1), ..., \overline{v}(t_n) > \in P^{\mathcal{A}}$, αν ο φ είναι της μορφής $P(t_1, ..., t_n)$

γ) δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \psi[v]$, αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$

δ) αν $\mathcal{A} \models \psi[v]$, τότε $\mathcal{A} \models \chi[v]$, αν ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$

ε) για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$: $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$, αν ο φ είναι της μορφής $\forall x \psi$.

Αν ο φ δεν αληθεύει για την v στην $\mathcal{A}$, τότε γράφουμε $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$.

2) το T 'αληθεύει για τη v στην $\mathcal{A}$' ή 'η v ικανοποιεί το T στην $\mathcal{A}$' ανν κάθε στοιχείο του T αληθεύει για τη v στην $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση. Από τον τρόπο που ορίσαμε τα $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists$, είναι προφανές ότι για κάθε δομή $\mathcal{A}$ για τη Γ_1 και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{A} \models \psi \wedge \chi[v] & \text{ανν} & (\mathcal{A} \models \psi[v] \text{ και } \mathcal{A} \models \chi[v]) \\
\mathcal{A} \models \psi \vee \chi[v] & \text{ανν} & (\mathcal{A} \models \psi[v] \text{ ή } \mathcal{A} \models \chi[v]) \\
\mathcal{A} \models \psi \leftrightarrow \chi[v] & \text{ανν} & (\mathcal{A} \models \psi[v] \text{ και } \mathcal{A} \models \chi[v]) \text{ ή} \\
 & & (\mathcal{A} \not\models \psi[v] \text{ και } \mathcal{A} \not\models \chi[v]) \\
\mathcal{A} \models \exists x \psi[v] & \text{ανν} & (\text{υπάρχει } a \in |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]).
\end{array}$$

Παραδείγματα. α) Ας θεωρήσουμε τη δομή $\mathcal{N}_\sigma$ για τη $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που ορίσαμε στο Παράδειγμα 1) πριν από τον Ορισμό 3.1.6, και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{N}_\sigma$ τέτοια που $v(x_1) = 3$, $v(x_2) = 5$. Τότε $\mathcal{N}_\sigma \models x_1 \in x_2[v]$, αφού $< v(x_1), v(x_2) > \in \in^{\mathcal{N}_\sigma}$

(δηλ. $< 3, 5 > \in \in^{\mathcal{N}_\sigma}$).
β) Ας θεωρήσουμε τώρα τη δομή $\mathcal{N}^*$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{N}^*$ τέτοια που $v(x_2) = 0$. Τότε $\mathcal{N}^* \models \forall x_1 x_1 \oplus x_2 \approx x_1[v]$, αφού για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $(-n)+^{\mathcal{N}^*}0 = (-n)$, δηλ. $\mathcal{N}^* \models x_1 + x_2 \approx x_1[v(x_1| - n)]$. Αν όμως v' είναι μια αποτίμηση στην $\mathcal{N}^*$ τέτοια που $v'(x_2) = -1$, τότε $\mathcal{N}^* \not\models \forall x_1 x_1 + x_2 \approx x_1[v]$, αφού δεν ισχύει $(-n)+^{\mathcal{N}^*}(-1) = -n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Είναι προφανές διαισθητικά ότι το αν αληθεύει ένας τύπος για μια αποτίμηση v στη δομή $\mathcal{A}$ εξαρτάται από τις τιμές που δίνει η v μόνο στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο αυτό. Αυτό αποδεικνύεται, δηλαδή ισχύει η ακόλουθη.

Πρόταση 3.1.1 *Για κάθε τύπο φ, τυχούσα δομή $\mathcal{A}$ και οποιεσδήποτε αποτιμήσεις v_1, v_2 στην $\mathcal{A}$, αν οι v_1, v_2 συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στο φ, τότε*

$$\mathcal{A} \models \varphi[v_1] \quad \textit{ανν} \quad \mathcal{A} \models \varphi[v_2].$$

Άμεσο πόρισμα είναι ότι μια πρόταση της Γ_1 αληθεύει για όλες τις αποτιμήσεις ή για καμιά τους. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1.8 *Έστω $\varphi \in \Pi(\Gamma_1)$, $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ και $\mathcal{A}$ δομή για την Γ_1. Λέμε ότι*

1) *η φ είναι 'αληθής στην $\mathcal{A}$' ή η $\mathcal{A}$ είναι 'μοντέλο της φ', και γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi$, ανν η φ αληθεύει για κάθε αποτίμηση στην $\mathcal{A}$.*

2) *η φ είναι 'ψευδής στην $\mathcal{A}$', και γράφουμε $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ανν η φ δεν είναι αληθής στην $\mathcal{A}$.*

3) *η $\mathcal{A}$ είναι 'μοντέλο του Π' ανν η $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο κάθε στοιχείου του Π.*

Παράδειγμα. Θα δείξουμε ότι η πρόταση $\exists x_0 \forall x_1 x_0 \odot x_1 \approx x_1$ είναι αληθής στη δομή $\mathcal{N}$ για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$. Έστω v τυχούσα αποτίμηση στην $\mathcal{N}$. Τότε
$\mathcal{N} \models \exists x_0 \forall x_1 x_0 \odot x_1 \approx x_1[v]$ ανν
υπάρχει $m \in \mathbf{N} : \mathcal{N} \models \forall x_1 x_0 \odot x_1 \approx x_1[v(x_0|m)]$ ανν
υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο που για κάθε $n \in \mathbf{N}$:

$$\mathcal{N} \models x_0 \odot x_1 \approx x_1[v(x_0|m, x_1|n)] \text{ ανν}$$

υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο που για κάθε $n \in \mathbf{N}$:

$$\overline{v(x_0|m, x_1|n)}(x_0 \odot x_1) = \overline{v(x_0|m, x_1|n)}(x_1) \text{ ανν}$$

υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο που για κάθε $n \in \mathbf{N} : m \cdot n = n$, που είναι αλήθεια.

Ας μη ξεχνάμε όμως ότι ο σκοπός μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τις πρωτοβάθμιες γλώσσες για την μελέτη μαθηματικών αποδείξεων. Και εδώ, όπως στην προτασιακή λογική, υπάρχουν δυο ισοδύναμοι τρόποι να δουλέψουμε: ο συντακτικός και ο σημασιολογικός. Όπως και στην προτασιακή λογική, θ' αρχίσουμε με τη σημασιολογική προσέγγιση.

3.2 Λογικές συνεπαγωγές

Ορισμός 3.2.1 *Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Θα λέμε ότι*

1) *το T 'συνεπάγεται λογικά το φ', και θα γράφουμε $T \models \varphi$, ανν για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$, αν αληθεύει το T για τη v, τότε αληθεύει και ο φ για τη v.*

2) *ο φ είναι 'έγκυρος' ή ο φ είναι 'λογικά αληθής' ανν για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ ο φ αληθεύει για τη v.*

Παρατηρήσεις. α) Για κάθε $\varphi : \emptyset \models \varphi$ ανν ο φ είναι έγκυρος, δηλ. οι έγκυροι τύποι είναι ακριβώς οι λογικές συνέπειες του $\emptyset$ (αντιστοιχούν λοιπόν στις ταυτολογίες).
β) Οι έννοιες ο ψ 'συνεπάγεται λογικά' το φ και οι φ, ψ είναι 'λογικά ισοδύναμοι' ορίζονται όπως οι αντίστοιχες στον προτασιακό λογισμό.
γ) Συνδυάζοντας τους ορισμούς 3.1.8 και 3.2.1 βλέπουμε ότι για κάθε $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$, $\varphi \in \Pi(\Gamma_1)$:

$$\Pi \models \varphi \text{ ανν κάθε μοντέλο του } \Pi \text{ είναι μοντέλο της } \varphi.$$

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα λογικών συνεπαγωγών.
Παραδείγματα. Έστω Q μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο.
1) Θα δείξουμε ότι $\forall x_1 Q(x_1) \models Q(x_2)$. Έστω λοιπόν Q μια δομή και v μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ τέτοια που $\mathcal{A} \models \forall x_1 Q(x_1)[v]$. Τότε για κάθε $a \in |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \models Q(x_1)[v(x_1|a)]$, δηλ. για κάθε $a \in |\mathcal{A}| : a \in Q^{\mathcal{A}}$. Προφανώς τότε $v(x_2) \in Q^{\mathcal{A}}$, οπότε $\mathcal{A} \models Q(x_2)[v]$, δηλ. ισχύει το ζητούμενο.
2) Θα δείξουμε ότι $Q(x_1) \not\models \forall x_1 Q(x_1)$. Αυτή τη φορά έχουμε λίγο δυσκολότερη δουλειά: να βρούμε μια δομή $\mathcal{A}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ τέτοια που ο $Q(x_1)$ να αληθεύει για τη v στην $\mathcal{A}$, αλλά ο $\forall x_1 Q(x_1)$ να μην αληθεύει. Έστω λοιπόν $\mathcal{A}$ δομή με σύμπαν το σύνολο $\{a_0, a_1\}$ (όπου $a_0 \neq a_1$) και $Q^{\mathcal{A}} \approx \{a_0\}$. Επίσης έστω v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ τέτοια που $v(x_1) \approx a_0$. Τότε $\mathcal{A} \models Q(x_1)[v]$, αφού $v(x_1) \in Q^{\mathcal{A}}$, αλλά $\mathcal{A} \not\models \forall x_1 Q(x_1)[v]$, αφού $a_1 \notin Q^{\mathcal{A}}$. Ας σημειωθεί ότι αντί για την $\mathcal{A}$ μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε δομή $\mathcal{B}$ τέτοια που το $|\mathcal{B}|$

να έχει τουλάχιστο δυο στοιχεία και $Q^{\mathcal{B}} \subset |\mathcal{B}|$.
3) Θα δείξουμε τώρα ότι $\models \forall x_1 Q(x_1) \rightarrow \exists x_2 Q(x_2)$. Έστω λοιπόν $\mathcal{A}$ μια δομή και v μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ τέτοια που $\mathcal{A} \models \forall x_1 Q(x_1)[v]$. Τότε για κάθε $a \in |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \models Q(x_1)[v(x_1|a)]$, δηλ. για κάθε $a \in |\mathcal{A}| : a \in Q^{\mathcal{A}}$. Έστω a_0 τυχόν στοιχείο του $|\mathcal{A}|$. Τότε $a_0 \in Q^{\mathcal{A}}$ και συνεπώς $\mathcal{A} \models Q(x_2)[v(x_2|a_0)]$. Άρα υπάρχει $a \in |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \models Q(x_2)[v(x_2|a)]$, οπότε $\mathcal{A} \models \exists x_2 Q(x_2)$, δηλ. ισχύει το ζητούμενο.
4) Θεωρούμε τις ακόλουθες προτάσεις της ελληνικής γλώσσας:

Κανένας διπλωμάτης δεν είναι τρομοκράτης.
Μερικοί φανατικοί είναι τρομοκράτες.
Μερικοί διπλωμάτες είναι φανατικοί.

Χρησιμοποιώντας αντίστοιχες προτάσεις μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, θα δείξουμε ότι οι δυο πρώτες δε συνεπάγονται λογικά την τρίτη. Έστω λοιπόν Γ_1 μια πρωτοβάθμια γλώσσα που έχει τουλάχιστον τρία μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P, Q, R. Οι ακόλουθες προτάσεις της Γ_1 αντιστοιχούν στις ανωτέρω προτάσεις της ελληνικής γλώσσας:

$$\forall x_1(P(x_1 \rightarrow \neg Q(x_1)),\ \exists x_1(R(x_1) \wedge Q(x_1)),\ \exists x_1(P(x_1) \wedge R(x_1)).$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι

$$\{\forall x_1(P(x_1) \rightarrow \neg Q(x_1)), \exists x_1(R(x_1 \wedge Q(x_1))\} \not\models \exists x_1(P(x_1) \wedge R(x_1)).$$

Αρκεί να βρούμε μια δομή $\mathcal{A}$ τέτοια που οι δυο πρώτες προτάσεις να αληθεύουν στην $\mathcal{A}$ ενώ η τρίτη να μην αληθεύει. Θεωρούμε λοιπόν μια δομή $\mathcal{A}$ με $|\mathcal{A}| = \{a_1, a_2, a_3\}$ (όπου τα a_1, a_2, a_3 διαφορετικά) και $P^{\mathcal{A}} = \{a_1\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{a_2\}$, $R^{\mathcal{A}} = \{a_2, a_3\}$. Με βάση τους ορισμούς, έχουμε ότι
$\mathcal{A} \models \forall x_1(P(x_1) \rightarrow \neg Q(x_1))$ ανν
(για κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ και κάθε $a \in |\mathcal{A}|$:

$$\mathcal{A} \models P(x_1) \rightarrow \neg Q(x_1)[v(x_1|a)])) \text{ ανν}$$

(για κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ και κάθε $a \in |\mathcal{A}|$:

$$\text{αν } \mathcal{A} \models P(x_1)[v(x_1|a)], \text{ τότε } \mathcal{A} \not\models Q(x_{1)}[v(x_1|a)]) \text{ ανν}$$

(για κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ και κάθε $a \in |\mathcal{A}|$:

$$\text{αν } a \in P^{\mathcal{A}}, \text{ τότε } a \notin Q^{\mathcal{A}},$$

πράγμα που αληθεύει. Συνεπώς η $\forall x_1(P(x_1) \to \neg Q(x_1))$ είναι αληθής στην $\mathcal{A}$. Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι η $\exists x_1(R(x_1) \wedge Q(x_1))$ είναι αληθής στην $\mathcal{A}$ ενώ η $\exists x_1(P(x_1 \wedge R(x_1))$ δεν είναι.

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, υπάρχει ένας αλγόριθμος με βάση τον οποίο, αν δοθεί πεπερασμένο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και τυχών προτασιακός τύπος φ, μπορούμε ν' αποφασίσουμε αν $T \models \varphi$ ή όχι, και συνεπώς, λόγω του θεωρήματος πληρότητας, αν $T \vdash_{\mathcal{A}_0} \varphi$ ή όχι.
Για την κατηγορηματική λογική δυστυχώς δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο, αφού οι περιπτώσεις που πρέπει να εξεταστούν είναι άπειρες, διότι υπάρχουν άπειρες δυνατές δομές για τη Γ_1. Έτσι συγκεντρώνουμε την προσοχή μας στην κατασκευή και μελέτη αξιωματικών συστημάτων για την κατηγορηματική λογική.

3.3 Κατηγορηματικός λογισμός

Θ' αρχίσουμε μ' ένα ορισμό.

Ορισμός 3.3.1 *Θα λέμε ότι ο φ είναι 'γενίκευση' του ψ ανν ο φ ταυτίζεται με τον ψ ή ο φ είναι της μορφής $\forall y_1 ... \forall y_n \psi$.*

Παραδείγματος χάρη, ο τύπος $\forall x_1(P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1))$ είναι γενίκευση του $P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_2)$ και ο $\forall x_1 \forall x_3(Q(x_1) \vee R(x_1))$ είναι γενίκευση του $Q(x_1) \vee R(x_1)$.

Ένα αξιωματικό σύστημα για την κατηγορηματική λογική

$$\mathcal{A}_1 =< A_1, K_1 >$$

ορίζεται ως εξής:

α) Το σύνολο K_1 είναι το ίδιο με το K_0 που είχαμε στον προτασιακό λογισμό, έχει δηλαδή μόνο ένα στοιχείο, τον κανόνα $M.P.$

β) Το σύνολο A_1 των αξιωμάτων ισούται με την ένωση δυο ξένων συνόλων, των Λ_1 και M_1. Τα στοιχεία του Λ_1 καλούνται 'λογικά αξιώματα', περιγράφουν τον ρόλο των λογικών συμβόλων της Γ_1 και είναι όλες οι γενικεύσεις τύπων της ακόλουθης μορφής:

$A\Sigma 1$ φ,
όπου φ είναι ο τύπος που παίρνουμε αν σε μια ταυτολογία αντικαταστήσουμε όλες τις προτασιακές μεταβλητές με τύπους της Γ_1, π.χ. $P(x_1) \wedge Q(x_1, x_3) \to Q(x_1, x_3) \wedge P(x_1)$

$A\Sigma 2$ $\forall x\varphi \to \varphi^x_t$,
όπου η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στο φ (δες Ορισμό 3.3.2) και φ^x_t είναι ο τύπος που παίρνουμε από τον φ αντικαθιστώντας την x, όπου εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, με t.

$A\Sigma 3$ $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

$A\Sigma 4$ $\varphi \to \forall x\varphi$, όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ.

$A\Sigma 5$ $x \approx x$

$A\Sigma 6$ $x \approx y \to (\varphi \to \varphi^*)$,
όπου φ ατομικός τύπος και φ^* ο τύπος που παίρνουμε από το φ αντικαθιστώντας την x (σε μερικές ή όλες τις εμφανίσεις) με y.

Τα στοιχεία του M_1 καλούνται 'μη λογικά αξιώματα' και περιγράφουν το ρόλο των μη λογικών συμβόλων της Γ_1. Προφανώς λοιπόν άλλα θα είναι τα μη λογικά αξιώματα ενός αξιωματικού συστήματος για τη θεωρία συνόλων και άλλα ενός για τη θεωρία αριθμών. Το πιο συνηθισμένο αξιωματικό σύστημα για τη θεωρία αριθμών $\mathcal{A}^{\theta\alpha}_1$ έχει τα ακόλουθα μη λογικά αξιώματα (του Peano):

$P1$ $\forall x_1 x_1' \neq \mathbf{0}$

$P2$ $\forall x_1 \forall x_2 (x_1' \approx x_2' \to x_1 \approx x_2)$

$P3$ $\forall x_1 x_1 \oplus \mathbf{0} \approx x_1$

$P4$ $\forall x_1 \forall x_2 x_1 \oplus x_2' \approx (x_1 \oplus x_2)'$

$P5$ $\forall x_1 x_1 \odot \mathbf{0} \approx \mathbf{0}$

$P6$ $\forall x_1 \forall x_2 x_1 \odot x_2' \approx x_1 \odot x_2 \oplus x_1$

$P7$ $\forall x_1 ... \forall x_n [\varphi(\mathbf{0}, \vec{x}) \wedge \forall x_0 (\varphi(x_0, \vec{x}) \to \varphi(x_0', \vec{x})) \to \forall x_0 \varphi(x_0, \vec{x})]$,
όπου $\varphi(x_0, ..., x_n)$ τύπος της $\Gamma^{\theta\alpha}_1$ τέτοιος που οι μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες σ' αυτόν είναι ανάμεσα στις $x_0, ..., x_n$.

(Το αξιωματικό σχήμα $P7$ αντιστοιχεί στην αρχή της επαγωγής για το σύνολο των φυσικών αριθμών.)
Το πιο συνηθισμένο αξιωματικό σύστημα για τη θεωρία συνόλων $\mathcal{A}^{\theta\sigma}_1$ έχει ως μη λογικά αξιώματα τα αξιώματα των Zermelo-Fraenkel, μερικά από τα οποία είναι τα εξής:

$ZF1$ $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \approx x_2 \leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \in x_1 \leftrightarrow x_3 \in x_2))$
$ZF2$ $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (x_3 \in x_2 \leftrightarrow \forall x_4 (x_4 \in x_3 \to x_4 \in x_1))$
$ZF3$ $\exists x_1 \forall x_2 x_2 \notin x_1$

Πρέπει να τονισθεί ότι δεν αποκλείεται να ισχύει $M_1 \approx \emptyset$, να μην έχει δηλαδή το αξιωματικό σύστημα καθόλου μη λογικά αξιώματα.

Παρατηρήσεις. α) Αντί για τα σύνολα Λ_1, K_1τα,

ιδιότητα (που εκφράζει ο τύπος) φ, τότε και το συγκεκριμένο αντικείμενο t έχει τη φ", όμως πρέπει να προσέξουμε μήπως κάποιο κομμάτι του t είναι ασυμβίβαστο με κάποιο κομμάτι του φ: δεν πρέπει κάποια μεταβλητή που εμφανίζεται στον t να δεσμευθεί από κάποιο ποσοδείκτη του φ. Ας δούμε μ' ένα παράδειγμα τι θέλουμε ν' αποφύγουμε:
Έστω φ ο τύπος $\exists y x \not\approx y$ και t ο όρος y. Τότε ο φ_t^x είναι ο τύπος $\exists y y \not\approx y$, οπότε $\forall x \varphi \to \varphi_t^x$ είναι η πρόταση

$$\forall x \exists y x \not\approx y \to \exists y y \not\approx y,$$

η οποία είναι ψευδής σχεδόν σ' όλες τις δομές για τη Γ_1. Πράγματι, η πρόταση $\forall x \exists y x \not\approx y$ είναι αληθής σε κάθε δομή $\mathcal{A}$ της οποίας το σύμπαν έχει τουλάχιστο δυο στοιχεία, ενώ η $\exists y y \not\approx y$ είναι ψευδής σε κάθε δομή $\mathcal{A}$. Αν λοιπόν δεν βάλουμε κάποιο περιορισμό στις αντικαταστάσεις μεταβλητών από όρους, θα έχουμε ως αξίωμα την πρόταση $\forall x \exists y x \not\approx y \to \exists y y \not\approx y$, πράγμα που δε συμβιβάζεται με την εύλογη επιθυμία μας να παίρνουμε ως λογικά αξιώματα έγκυρους τύπους.

Ορισμός 3.3.2 *Θα λέμε ότι η x είναι 'αντικαταστάσιμη από τον t στο φ' ανν*

1) ο φ είναι ατομικός ή

2) ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ ή

3) ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ και στον χ ή

4) ο φ είναι της μορφής $\forall y \psi$ και

α) η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall y \psi$ ή

β) η y δεν εμφανίζεται στον t και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ.

Παραδείγματος χάρη, η x είναι αντικαταστάσιμη από την x σε κάθε τύπο φ και η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από την y στον τύπο $P(x) \to \exists y Q(x,y)$. Προφανώς, αν καμιά από τις μεταβλητές του t δεν εμφανίζεται στο φ, τότε η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στο φ.

Τώρα που έχουμε περιγράψει πλήρως το αξιωματικό σύστημα $\mathcal{A}_1$, ας δούμε ένα παράδειγμα τυπικής απόδειξης σ' αυτό, που δείχνει ότι ο $\forall x(P(x) \to \exists y P(y))$ είναι τυπικό θεώρημά του.

1.	$\forall x[(\forall y \neg P(y) \to \neg P(x)) \to (P(x) \to \neg \forall y \neg P(y))]$	$A\Sigma 1$
2.	$\forall x[(\forall y \neg P(y) \to \neg P(x)) \to (P(x) \to \neg \forall y \neg P(y))] \to$ $[\forall x(\forall y \neg P(y) \to \neg P(x)) \to \forall x(P(x) \to \neg \forall y \neg P(y))]$	$A\Sigma 3$
3.	$\forall x(\forall y \neg P(y) \to \neg P(x)) \to \forall x(P(x) \to \neg \forall y \neg P(y))$	1, 2, $M.P.$
4.	$\forall x(\forall y \neg P(y) \to \neg P(x))$	$A\Sigma 2$
5.	$\forall x(P(x) \to \neg \forall y \neg P(y))$	3, 4, M.P.

Το πρώτο από τα θεωρήματα που θα αποδείξουμε γιά το $\mathcal{A}_1$ μιλά γιά την εξής μέθοδο απόδειξης που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά: Αν θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε x έχει μια ιδιότητα, δείχνουμε ότι ένα τυχόν x έχει αυτήν την ιδιότητα.

Θεώρημα 3.3.1 (Θεώρημα Γενίκευσης) *Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Αν $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$ και η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T, τότε $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T και $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$. Τότε υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi$ στο $\mathcal{A}_1$ από το T. Με επαγωγή στο i θα δείξουμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$: $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi_i$.
Πρώτο βήμα: $i = 1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
1) $\varphi_1 \in \Lambda_1$. Τότε $\forall x \varphi_1 \in \Lambda_1$, οπότε προφανώς $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi_1$.
2) $\varphi_1 \in T$. Τότε η ακόλουθη τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}_1$ δείχνει ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi_1$:

1.	φ_1	Υπόθεση
2.	$\varphi_1 \to \forall x \varphi_1$	$A\Sigma 4$
3.	$\forall x \varphi_1$	1, 2, $M.P.$

Δεύτερο βήμα: Έστω ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi_k$ για κάθε τέτοιο που $< i \leq n$. Θα δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi_i$. Διακρίνουμε πάλι δυο περιπτώσεις.
1) $\varphi_i \in \Lambda_1 \cup T$. Τότε έχουμε το ζητούμενο όπως πριν.
2) Ο φ_i είναι άμεση συνέπεια των φ_j, $\varphi_j \to \varphi_i = \varphi_l$, $j, l < i$, με βάση τον $M.P.$ Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, έχουμε ότι

$$T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi_j \;\; \text{και} \;\; T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x(\varphi_j \to \varphi_i).$$

Κατασκευάζουμε τώρα την ακόλουθη τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}_1$:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & ... \\ .. & ... \\ \lambda. & \forall x \varphi_j \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη του } \forall x \varphi_j \text{ από το } T$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda + 1. & ... \\ .. & ... \\ \mu. & \forall x(\varphi_j \to \varphi_i) \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη του } \forall x(\varphi_j \to \varphi_i) \text{ από το } T$$

μ+1.	$\forall x(\varphi_j \to \varphi_i) \to (\forall x \varphi_j \to \forall x \varphi_i)$	$A\Sigma 3$
μ+2.	$\forall x \varphi_j \to \forall x \varphi_i$	μ, μ+1, $M.P.$
μ+3.	$\forall x \varphi_i$	λ, μ+2, $M.P.$

Συνεπώς $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi_i$, οπότε η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης. Άρα $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi_n$, δηλ. $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi$.

Παρατήρηση. Ο περιορισμός που θέσαμε στην x στο προηγούμενο θεώρημα είναι απαραίτητος, όπως φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα:
Έστω ότι $T = \{P(x)\}$ και $\varphi = P(x)$, όπου P είναι μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο της Γ_1. Τότε προφανώς ισχύει $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$, όμως δεν είναι αλήθεια ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \varphi$, διότι $P(x) \not\models \forall x P(x)$ (δες Παράδειγμα 2 μετά τον Ορισμό 3.2.1) και, όπως θα δούμε αργότερα, αν $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi$, τότε $T \models \psi$.

Όπως και στον προτασιακό λογισμό, μπορούμε ν' αποδείξουμε τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 3.3.2 (Θεώρημα Απαγωγής) *Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Τότε για κάθε φ, ψ:*

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi \ \text{ ανν } \ T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi \to \psi.$$

Θεώρημα 3.3.3 (Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής) *Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και για κάθε φ, ψ:*

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\psi \ \text{ ανν } \ T \cup \{\psi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi.$$

Θεώρημα 3.3.4 (Θεώρημα της σε άτοπο απαγωγής) *Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και κάθε τύπο φ:*

$$\text{το } T \cup \{\varphi\} \text{ είναι αντιφατικό } \ \text{ ανν } \ T \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi.$$

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα όπου χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα θεωρήματα για να δείξουμε ότι ένας τύπος είναι τυπικό θεώρημα του $\mathcal{A}_1$.
Παράδειγμα. Θα δείξουμε ότι για κάθε φ:

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi.$$

Λόγω του θεωρήματος απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\exists x \forall y \varphi \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y \exists x \varphi.$$

Λόγω του θεωρήματος γενίκευσης, αφού η y είναι δεσμευμένη στον $\exists x \forall y \varphi$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\exists x \forall y \varphi \vdash_{\mathcal{A}_1} \exists x \varphi, \text{ δηλ. ότι } \neg\forall x \neg\forall y \varphi \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\forall x \neg\varphi.$$

Λόγω του θεωρήματος αντιθετοαναστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x \neg\varphi \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\neg\forall x \neg\forall y \varphi.$$

Αλλά ο τύπος $\neg\neg\forall x\neg\forall y\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\forall y\varphi$ είναι αξίωμα, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\neg\varphi \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x\neg\forall y\varphi.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το θεώρημα γενίκευσης, έχουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x\neg\varphi \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\forall y\varphi$, δηλ. ότι το σύνολο $\{\forall x\neg\varphi, \forall y\varphi\}$ είναι αντιφατικό (λόγω του Θεωρήματος 3.3.4.). Η ακόλουθη τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}_1$ μας εξασφαλίζει ότι $\{\forall x\neg\varphi, \forall y\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi$:

1.	$\forall x\neg\varphi$	Υπόθεση
2.	$\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	$A\Sigma 2$
3.	$\neg\varphi$	1, 2, $M.P.$

Όμοια δείχνουμε ότι $\{\forall x\neg\varphi, \forall y\varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$, οπότε έπεται το ζητούμενο.

Γενικά, όταν θέλουμε να δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$, ακολουθούμε την εξής τακτική:

1. Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \rightarrow \chi$, τότε αρκεί, σύμφωνα με το θεώρημα απαγωγής, να δείξουμε ότι $T \cup \{\psi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \chi$.

2. Αν ο φ είναι της μορφής $\forall x\psi$, όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T, τότε αρκεί, σύμφωνα με το θεώρημα γενίκευσης, να δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi$.

3. Αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$, τότε διακρίνουμε υποπεριπτώσεις:

   α) Αν ο ψ είναι της μορφής $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi_1$ και $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\psi_2$. Πράγματι, έχοντας αυτά ως δεδομένα, χρησιμοποιώντας το αξίωμα $\psi_1 \rightarrow (\neg\psi_2 \rightarrow \neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2))$, μπορούμε να δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$.

   β) Αν ο ψ είναι της μορφής $\neg\chi$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \chi$, αφού ο $\chi \rightarrow \neg\neg\chi$ είναι αξίωμα.

   γ) Αν ο ψ είναι της μορφής $\forall x\chi$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\chi^x_t$ για κάποιον όρο t τέτοιο που η x να είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον χ. Πράγματι, έχοντας δείξει ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\chi^x_t$, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα $\forall x\chi \rightarrow \chi^x_t$ και $(\forall x\chi \rightarrow \chi^x_t) \rightarrow (\neg\chi^x_t \rightarrow \neg\forall x\chi)$, μπορούμε να δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα ακόμα.

Παραδείγματα. α) Θα δείξουμε ότι αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε $\vdash_{\mathcal{A}_1} (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.

Πριν προχωρήσουμε, κάνουμε την εξής παρατήρηση:
Όταν θέλουμε ν' αποδείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \chi_1 \leftrightarrow \chi_2$, αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \chi_1 \to \chi_2$ και $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \chi_2 \to \chi_1$, αφού ο τύπος

$$(\chi_1 \to \chi_2) \to ((\chi_2 \to \chi_1) \to (\chi_1 \leftrightarrow \chi_2))$$

είναι αξίωμα.
Εδώ λοιπόν αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{array}{l} \vdash_{\mathcal{A}_1} (\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi) \text{ και} \\ \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi). \end{array}$$

Για το πρώτο μέρος, λόγω του θεωρήματος γενίκευσης και του θεωρήματος απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\varphi \to \forall x\psi, \varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi.$$

Αυτό όμως δείχνει η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\varphi \to \forall x\psi$	Υπόθεση
2.	φ	Υπόθεση
3.	$\forall x\psi$	1, 2, $M.P.$
4.	$\forall x\psi \to \psi$	$A\Sigma 2$
5.	ψ	3, 4, $M.P.$

Για το δεύτερο μέρος, πάλι λόγω του θεωρήματος απαγωγής και του θεωρήματος γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi,$$

πράγμα που δείχνει η τυπική απόδειξη:

1.	$\forall x(\varphi \to \psi)$	Υπόθεση
2.	φ	Υπόθεση
3.	$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	$A\Sigma 2$
4.	$\varphi \to \psi$	1, 3, $M.P.$
5.	ψ	2, 4, $M.P.$

β) Θα δείξουμε ότι αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} (\exists x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \to \varphi).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{array}{ll} & \vdash_{\mathcal{A}_1} (\exists x\psi \to \varphi) \to \forall x(\psi \to \varphi) \text{ και} \\ & \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x(\psi \to \varphi) \to (\exists x\psi \to \varphi), \\ \text{δηλ. ότι} & \vdash_{\mathcal{A}_1} (\neg\forall x\neg\psi \to \varphi) \to \forall x(\psi \to \varphi) \\ \text{και} & \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x(\psi \to \varphi) \to (\neg\forall x\neg\psi \to \varphi). \end{array}$$

Για το πρώτο μέρος, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\neg\forall x\neg\psi \to \varphi, \psi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi.$$

Αυτό όμως φαίνεται από την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\neg\forall x\neg\psi \to \varphi$	Υπόθεση
2.	ψ	Υπόθεση
3.	$(\forall x\neg\psi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\forall x\neg\psi)$	$A\Sigma 1$
4.	$\forall x\neg\psi \to \neg\psi$	$A\Sigma 2$
5.	$\psi \to \neg\forall x\neg\psi$	3, 4, $M.P.$
6.	$\neg\forall x\neg\psi$	2, 5, $M.P.$
7.	φ	1, 6, $M.P.$

Όμοια δουλεύουμε για το δεύτερο μέρος.
γ) Θα δείξουμε ότι $\vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x\forall y(x\approx y \to y\approx x)$.
Λόγω του θεωρήματος γενίκευσης και του θεωρήματος απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι $x\approx y \vdash_{\mathcal{A}_1} y\approx x$.
Αυτό όμως το δείχνει η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$x\approx y$	Υπόθεση
2.	$x\approx y \to (x\approx x \to y\approx x)$	$A\Sigma 6$
3.	$x\approx x \to y\approx x$	1, 3, $M.P.$
4.	$x\approx x$	$A\Sigma 5$
5.	$y\approx x$	3, 4, $M.P.$

δ) Θα δείξουμε ότι για κάθε διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο f:

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} \forall z_1\forall z_2\forall y_1\forall y_2(z_1\approx y_1 \to (z_2\approx y_2 \to f(z_1,z_2)\approx f(y_1,y_2))).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{z_1\approx y_1, z_2\approx y_2\} \vdash_{\mathcal{A}_1} f(z_1,z_2)\approx f(y_1,y_2).$$

Κατασκευάζουμε λοιπόν την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$z_1 \approx y_1$	Υπόθεση
2.	$z_2 \approx y_2$	Υπόθεση
3.	$z_1 \approx y_1 \to (f(z_1, z_2) \approx f(z_1, z_2) \to f(z_1, z_2) \approx f(y_1, z_2))$	$A\Sigma 6$
4.	$f(z_1, z_2) \approx f(z_1, z_2) \to f(z_1, z_2) \approx f(y_1, z_2)$	1, 3, $M.P.$
5.	$\forall x_1 x_1 \approx x_1$	$A\Sigma 5$
6.	$\forall x_1 x_1 \approx x_1 \to f(z_1, z_2) \approx f(z_1, z_2)$	$A\Sigma 2$
7.	$f(z_1, z_2) \approx f(z_1, z_2)$	5, 6, $M.P.$
8.	$f(z_1, z_2) \approx f(y_1, z_2)$	4, 7, $M.P.$
9.	$z_2 \approx y_2 \to (f(z_1, z_2) \approx f(y_1, z_2) \to f(z_1, z_2) \approx f(y_1, y_2)$	$A\Sigma 6$
10.	$f(z_1, z_2) \approx f(y_1, z_2) \to f(z_1, z_2) \approx f(y_1, y_2)$	2, 9, $M.P.$
11.	$f(z_1, z_2) \approx f(y_1, y_2)$	8, 10, $M.P.$

ε) Θα δείξουμε ότι για τυχόντα μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P, Q και τυχούσα σταθερά c:

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall z P(z)\} \vdash_{\mathcal{A}_1} Q(c).$$

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Υπόθεση
2.	$\forall z P(z)$	Υπόθεση
3.	$\forall z P(z) \to P(c)$	$A\Sigma 2$
4.	$P(c)$	2, 3, $M.P.$
4.	$\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (P(c) \to Q(c))$	$A\Sigma 2$
6.	$P(c) \to Q(c)$	1, 5, $M.P.$
7.	$Q(c)$	4, 6, $M.P.$

Αν στην τυπική απόδειξη στο ε) ανωτέρω αντικαταστήσουμε το c παντού με το y, τότε θα πάρουμε μια τυπική απόδειξη που δείχνει ότι

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall z P(z)\} \vdash_{\mathcal{A}_1} Q(y).$$

Το ότι μια σταθερά σε πολλές περιπτώσεις παίζει τον ίδιο ρόλο με μια ελεύθερη μεταβλητή αποτελεί τη βάση για το ακόλουθο θεώρημα, που αναφέρουμε χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 3.3.5 (Θεώρημα Γενίκευσης Σταθερών) *Έστω ότι $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Αν $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$ και η c δεν εμφανίζεται σε κανένα στοιχείο του T, τότε υπάρχει y που δεν εμφανίζεται στο φ τέτοια που $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y \varphi^c_y$.*
(φ^c_y είναι ο τύπος που παίρνουμε από το φ αντικαθιστώντας τη c παντού με y.)

Πόρισμα του προηγούμενου θεωρήματος είναι το επόμενο θεώρημα, που αντιστοιχεί στην εξής μέθοδο που χρησιμοποιούμε για την κατασκευή μαθηματικών αποδείξεων:
Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε το B, με υπόθεση ότι υπάρχει ένα x με την ιδιότητα A. Καλούμε c ένα αντικείμενο που έχει την A και δείχνουμε το B.

Θεώρημα 3.3.6 (Θεώρημα Υπαρξιακής Σταθεροποίησης) *Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Αν $T \cup \{\varphi_c^y\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi$ και η c δεν εμφανίζεται σε κανένα στοιχείο του $T \cup \{\varphi, \psi\}$, τότε $T \cup \{\exists y \varphi\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi$.*

Ας ξαναδούμε το Παράδειγμα αμέσως μετά το Θεώρημα 3.3.4, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας το θεώρημα υπαρξιακής σταθεροποίησης. Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi.$$

Λόγω του θεωρήματος απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\exists x \forall y \varphi \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y \exists x \varphi.$$

Με βάση τώρα το θεώρημα υπαρξιακής σταθεροποίησης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall y \varphi_c^x \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y \exists x \varphi, \text{ όπου } c \text{ σταθερά που δεν εμφανίζεται στον } \varphi.$$

Τέλος, λόγω του θεωρήματος γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall y \varphi_c^x \vdash_{\mathcal{A}_1} \exists x \varphi, \text{ δηλ. ότι } \forall y \varphi_c^x \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg \forall x \neg \varphi.$$

Αυτό όμως ισχύει, όπως φαίνεται από την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$\forall y \varphi_c^x$	Υπόθεση
2.	$\forall y \varphi_c^x \to \varphi_c^x$	$A\Sigma 2$
3.	φ_c^x	1, 2, $M.P.$
4.	$\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi_c^x$	$A\Sigma 2$
5.	$(\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi_c^x) \to (\varphi_c^x \to \neg \forall x \neg \varphi)$	$A\Sigma 1$
6.	$\varphi_c^x \to \neg \forall x \neg \varphi$	4, 5, $M.P.$
7.	$\neg \forall x \neg \varphi$	3, 6, $M.P.$

Αρκετά όμως ασχοληθήκαμε με το αξιωματικό σύστημα $\mathcal{A}_1$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η συντακτική και η σημασιολογική προσέγγιση μιας μαθηματικής απόδειξης είναι ισοδύναμες.

3.4 Εγκυρότητα και πληρότητα

Αρχίζουμε μ' ένα ορισμό.

Ορισμός 3.4.1 *Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Θα λέμε ότι το T είναι 'ικανοποιήσιμο' ανν υπάρχει μια δομή $\mathcal{A}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ τέτοια που το T αληθεύει για τη v στην $\mathcal{A}$.*

Στη συνέχεια έχουμε το αντίστοιχο του Θεωρήματος 2.5.3.

Θεώρημα 3.4.1 (Θεώρημα Εγκυρότητας Κατηγορηματικού Λογισμού) *Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1)$:*

α) Αν $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$, τότε $T \models \varphi$.

β) Αν το T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι συνεπές.

Απόδειξη. α) Θεωρούμε ως δεδομένο ότι τα λογικά αξιώματα είναι έγκυροι τύποι και ότι ο κανόνας $M.P.$ διατηρεί τη λογική συνεπαγωγή (δες Άσκηση 61). Έστω λοιπόν ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$. Τότε υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\varphi_1, ..., \varphi_n \approx \varphi$ στο $\mathcal{A}_1$ από το T. Με επαγωγή στο i θα δείξουμε ότι $T \models \varphi_i$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

1) $i = 1$. Προφανώς $\varphi_1 \in \Lambda_1 \cup T$. Αν $\varphi_1 \in \Lambda_1$, τότε ο φ_1 είναι έγκυρος, οπότε $T \models \varphi_1$. Αν $\varphi_1 \in T$, τότε προφανώς $T \models \varphi_1$.

2) Έστω τώρα $i \leq n$ τέτοιο που $T \models \varphi_k$ για κάθε $\quad < i$. Θα δείξουμε ότι $T \models \varphi_i$. Αν $\varphi_i \in \Lambda_1 \cup T$, τότε έχουμε το ζητούμενο όπως στο 1). Αν ο φ_i είναι άμεση συνέπεια των φ_j, $\varphi_l = \varphi_j \to \varphi_i$, για κάποια $j, l < i$, με βάση τον $M.P.$, τότε, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, θα ισχύει $T \models \varphi_j$ και $T \models \varphi_j \to \varphi_i$. Αρα $T \models \varphi_i$, αφού ο $M.P.$ διατηρεί τη λογική συνεπαγωγή.

Η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης, άρα $T \models \varphi$.

β) Έστω ότι το T είναι ικανοποιήσιμο, αλλά αντιφατικό. Τότε για κάποιο τύπο φ: $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$ και $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi$. Άρα, λόγω του α), για κάποιο τύπο φ: $T \models \varphi$ και $T \models \neg\varphi$. Έστω τώρα $\mathcal{A}$ δομή και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ τέτοια που το T αληθεύει για τη v στην $\mathcal{A}$. Τότε $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ και $\mathcal{A} \models \neg\varphi[v]$, πράγμα αδύνατο.

Το ζητούμενο έπεται.

Παρατήρηση. Από την προηγούμενη απόδειξη βλέπουμε ότι α) $\Rightarrow$ β). Στην πραγματικότητα, ισχύει και το αντίστροφο (δες Άσκηση 62).

Το επόμενο πολύ σημαντικό θεώρημα αποδείχθηκε από τον K. Gödel και δημοσιεύθηκε το 1930.

Θεώρημα 3.4.2 (Θεώρημα Πληρότητας Κατηγορηματικού Λογισμού) *Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1)$:*

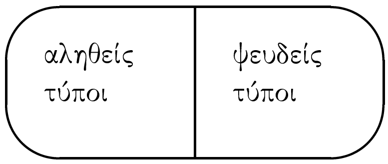
α) Αν $T \models \varphi$, τότε $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$.

β) Αν το T είναι συνεπές, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο.

(Σημειώνουμε ότι τα α), β) είναι ισοδύναμα - δες Άσκηση 63.)

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη του β) που έδωσε ο L. Henkin το 1949 (στη διδακτορική του διατριβή). Έστω λοιπόν T συνεπές σύνολο τύπων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας Γ_1. Η ιδέα της απόδειξης προήλθε από την εξής ανάλυση: Έστω ότι έχουμε τυχούσα δομή $\mathcal{A}$ για τη Γ_1 και τυχούσα αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$. Τότε προκύπτει ένας διαχωρισμός του συνόλου των τύπων της Γ_1 σε δυο "ίσα" μέρη: το σύνολο των τύπων που ικανοποιούνται από τη v στην $\mathcal{A}$ και το σύνολο των τύπων που δεν ικανοποιούνται από τη v στην $\mathcal{A}$ (που είναι ακριβώς οι αρνήσεις των τύπων του πρώτου μέρους):

$T(\Gamma_1)$



Αντίστροφα, αν μας δοθεί ένας διαχωρισμός όπως ανωτέρω, είναι δυνατόν απ' αυτόν να εκμαιεύσουμε τον ορισμό μιας δομής $\mathcal{A}$ και μιας αποτίμησης v ούτως, ώστε οι τύποι που αληθεύουν για τη v στην $\mathcal{A}$ να είναι ακριβώς οι τύποι του μέρους που περιέχει τους λογικά αληθείς τύπους.
Συνεπώς, η αναζήτηση αποτίμησης και δομής για τις οποίες ικανοποιείται το σύνολο T ισοδυναμεί με την αναζήτηση ενός συνόλου $\Sigma \subseteq T(\Gamma_1)$ το οποίο ικανοποιεί τα εξής:

α) $T \subseteq \Sigma$,

β) το Σ είναι συνεπές,

γ) το Σ είναι 'πλήρες', δηλαδή για κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1) : \varphi \in \Sigma$ ή $\neg\varphi \in \Sigma$,

δ) το Σ όντως αντιπροσωπεύει την αλήθεια.

Για να εξασφαλιστεί η ισχύς του δ), πρέπει να υπάρχουν οι αποκαλούμενοι *μάρτυρες Henkin*, δηλαδή σταθερές οι οποίες εξασφαλίζουν ότι αν ο τύπος $\exists y\varphi$ έχει συμπεριληφθεί στο Σ, τότε έχει συμπεριληφθεί και ο τύπος φ^y_c για κατάλληλη τέτοια σταθερά. Σημειώνουμε ότι για τεχνικούς λόγους (που θα γίνουν σαφείς στη συνέχεια) οι σταθερές αυτές πρέπει να διαφέρουν από αυτές που ήδη διαθέτει η Γ_1. Επίσης σημειώνουμε ότι πρέπει να ληφθεί ειδική μέριμνα για το $\approx$, αφού αυτό πρέπει να ερμηνευθεί οπωσδήποτε ως η σχέση ταυτότητας στο σύμπαν της δομής.

Ας στραφούμε τώρα στις λεπτομέρειες. Για ευκολία, υποθέτουμε ότι η Γ_1 έχει αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων. Έστω Γ_1^* η γλώσσα που παίρνουμε αν προσθέσουμε στη Γ_1 ένα αριθμήσιμο σύνολο νέων σταθερών $\{c_0, c_1, c_2, ...\}$. Κατόπιν της ανωτέρω ανάλυσης, η απόδειξη έχει τα εξής τρία βασικά βήματα:
<u>Πρώτο βήμα.</u> Ορίζουμε ένα σύνολο $\Sigma \subseteq T(\Gamma_1^*)$ τέτοιο που

α) $T \subseteq \Sigma$ και Σ συνεπές

β) Σ πλήρες στη Γ_1

γ) για κάθε τύπο φ της Γ_1^* και μεταβλητή y υπάρχει νέα σταθερά c τέτοια που $\exists y\varphi \to \varphi_c^y \in \Sigma$.

Δεύτερο βήμα. Ορίζουμε μια δομή $\mathcal{A}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ τέτοιες που κάθε στοιχείο του Σ που δεν περιέχει το $\approx$ ικανοποιείται από την v στην $\mathcal{A}$.
Τρίτο βήμα. Ορίζουμε μια δομή $\mathcal{A}'$ και μια αποτίμηση v' στην $\mathcal{A}'$ τέτοιες που κάθε στοιχείο του Σ ικανοποιείται από την v' στην $\mathcal{A}'$.

Θα δώσουμε αναλυτική απόδειξη μόνο για το πρώτο βήμα, ενώ θα δώσουμε σκιαγράφηση των αποδείξεων των άλλων δύο βημάτων (αφήνοντας λεπτομέρειες ως ασκήσεις).
Πρώτο βήμα. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι το T είναι συνεπές, αν το θεωρήσουμε ως σύνολο τύπων της Γ_1^*. Πράγματι, έστω ότι αυτό δεν ισχύει, δηλ. $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$ και $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi$, για κάποιο $\varphi \in T(\Gamma_1^*)$. Με βάση το θεώρημα γενίκευσης σταθερών, μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλες τις νέες σταθερές που εμφανίζονται στις τυπικές αποδείξεις που δείχνουν ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$ και $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi$ με μεταβλητές και να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν τυπικές αποδείξεις που χρησιμοποιούν τύπους της Γ_1 και δείχνουν ότι $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi^*$ και $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi^*$, για κατάλληλο $\varphi^* \in T(\Gamma_1)$. Άρα το T είναι αντιφατικό ως υποσύνολο του $T(\Gamma_1)$, πράγμα αδύνατο.

Έστω $< \varphi_0, y_0 >, < \varphi_1, y_1 >, ...$ απαρίθμηση όλων των ζευγαριών που έχουν ως πρώτη συντεταγμένη ένα τύπο της Γ_1^* και ως δεύτερη μια μεταβλητή της Γ_1^* (υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος τέτοιων ζευγαριών, διότι το σύνολο $T(\Gamma_1^*)$ είναι αριθμήσιμο – από τη Θεωρία Συνόλων ξέρουμε ότι αν A είναι τυχόν αριθμήσιμο σύνολο, τότε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του A είναι αριθμήσιμο).
Ορίζουμε μια ακολουθία τύπων $\theta_0, \theta_1, ...$ ως εξής:

α) θ_0 είναι ο τύπος $\exists y_0\varphi_0 \to (\varphi_0)_{c_{i_0}}^{y_0}$, όπου c_{i_0} η πρώτη νέα σταθερά που δεν εμφανίζεται στον φ_0 και

β) έχοντας ορίσει τους $\theta_0, ..., \theta_{n-1}$, ορίζουμε τον θ_n να είναι ο τύπος $\exists y_n\varphi_n \to (\varphi_n)_{c_{i_n}}^{y_n}$, όπου c_{i_n} είναι η πρώτη νέα σταθερά που δεν εμφανίζεται στους $\theta_0, ..., \theta_{n-1}, \varphi_n$.

Ισχυρισμός: Το $T^* = T \cup \{\theta_0, \theta_1, ...\}$ είναι συνεπές.
Απόδειξη: Έστω ότι το T^* είναι αντιφατικό. Τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολό του που είναι αντιφατικό, άρα υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο που το $T \cup \{\theta_0, ..., \theta_m\}$ να είναι αντιφατικό. Έστω το ελάχιστο τέτοιο m και ας υποθέσουμε ότι $\;> 0$ (αν $\;= 0$, τότε δουλεύουμε όμοια).
Αφού το $T \cup \{\theta_0, ..., \theta_k\}$ είναι αντιφατικό, λόγω του θεωρήματος απαγωγής σε άτοπο, θα ισχύει

$$T \cup \{\theta_0, ..., \theta_{k-1}\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\theta_k, \text{ δηλ.}$$
$$T \cup \{\theta_0, ..., \theta_{k-1}\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg(\exists y_k \varphi_k \to (\varphi_k)^{y_k}_{c_{i_k}}).$$

Όμως $\vdash_{\mathcal{A}_1} \neg(\varphi \to \psi) \to \varphi$ και $\vdash_{\mathcal{A}_1} \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$ για τυχόντες τύπους φ, ψ (λόγω $A\Sigma 1$). Άρα

$$T \cup \{\theta_0, ..., \theta_{k-1}\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \exists y_k \varphi_k \text{ και } T \cup \{\theta_0, ..., \theta_{k-1}\} \vdash_{\mathcal{A}_1} (\neg\varphi_k)^{y_k}_{c_{i_k}}.$$

Αφού η c_{i_k} δεν εμφανίζεται σε κανένα στοιχείο του $T \cup \{\theta_0, ..., \theta_{k-1}, \varphi_k\}$, λόγω της Ασκησης 59, θα ισχύει

$$T \cup \{\theta_0, ..., \theta_{k-1}\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y_k \neg\varphi_k.$$

Άρα το $T \cup \{\theta_0, ..., \theta_{k-1}\}$ είναι αντιφατικό, πράγμα αδύνατο λόγω του ορισμού του . Συνεπώς ισχύει ο ισχυρισμός.

Έστω τώρα $\psi_0, \psi_1, \psi_2, ...$ απαρίθμηση των τύπων της Γ_1^*. Ορίζουμε την ακολουθία $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, ...$ ως εξής:

$$\Sigma_0 = T^*$$
$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\psi_n\}, & \text{αν αυτό είναι συνεπές} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\psi_n\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τότε το Σ_n είναι συνεπές, για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Πράγματι, αυτό ισχύει για $n = 0$, λόγω του προηγούμενου ισχυρισμού. Έστω τώρα ότι το Σ_n είναι συνεπές, αλλά το Σ_{n+1} είναι αντιφατικό. Τότε, λόγω του ορισμού του Σ_{n+1}, το $\Sigma_n \cup \{\psi_n\}$ είναι αντιφατικό και το $\Sigma_n \cup \{\neg\psi_n\}$ είναι αντιφατικό. Άρα $\Sigma_n \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\psi_n$ και $\Sigma_n \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\neg\psi_n$, οπότε το Σ_n είναι αντιφατικό, πράγμα άτοπο. Θέτουμε $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Sigma_n$. Λόγω του ορισμού των Σ_n, ισχύουν τα α) - γ) που αναφέραμε στην αρχή. Παρατηρούμε ότι το Σ έχει την εξής ιδιότητα: αν $\Sigma \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$, τότε $\varphi \in \Sigma$. Πράγματι, έστω $\varphi \in T(\Gamma_1^*)$ τέτοιος που $\Sigma \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$, αλλά $\varphi \notin \Sigma$. Αφού το Σ είναι πλήρες, θα ισχύει $\neg\varphi \in \Sigma$, άρα προφανώς $\Sigma \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi$. Συνεπώς το Σ είναι αντιφατικό, πράγμα που δεν ισχύει.

Δεύτερο βήμα. Έστω Γ_1^{*E} η γλώσσα που παίρνουμε από την Γ_1^* αντικαθιστώντας το σύμβολο $\approx$ με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο E. Ορίζουμε τη δομή $\mathcal{A}$ για τη Γ_1^{*E} ως εξής:

1) $|\mathcal{A}| = O(\Gamma_1^{*E}) = O(\Gamma_1^*)$

2) $< s, t > \in E^{\mathcal{A}}$ ανν $s \approx t \in \Sigma$

3) $< t_1, ..., t_n > \in P^{\mathcal{A}}$ ανν $P(t_1, ..., t_n) \in \Sigma$

4) $f^{\mathcal{A}}(t_1, ..., t_n) = f(t_1, ..., t_n)$

5) $c^{\mathcal{A}} = c$.

Έστω v η αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ με $v(x) = x$ για κάθε μεταβλητή x. Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαγωγής για το $O(\Gamma_1^*)$ και το $T(\Gamma_1^*)$, μπορούμε να δείξουμε ότι

α) $\overline{v}(t) = t$, για κάθε $t \in O(\Gamma_1^*)$

β) $\mathcal{A} \models \varphi_E^{\approx}[v]$ ανν $\varphi \in \Sigma$, για κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1^*)$
(όπου $\varphi_E^{\approx}$ είναι ο τύπος που παίρνουμε από το φ αντικαθιστώντας το $\approx$ με το E).

Τρίτο βήμα. Μπορούμε να δείξουμε ότι η $E^{\mathcal{A}}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $|\mathcal{A}|$ και ότι για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P και κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f η σχέση $P^{\mathcal{A}}$ και η συνάρτηση $f^{\mathcal{A}}$ είναι συμβιβαστές με την $E^{\mathcal{A}}$, δηλαδή

α) αν $< t_1, ..., t_n > \in P^{\mathcal{A}}$ και $< t_1, s_1 > \in E^{\mathcal{A}}, ..., < t_n, s_n > \in E^{\mathcal{A}}$,
τότε $< s_1, ..., s_n > \in P^{\mathcal{A}}$,

β) αν $< t_1, s_1 > \in E^{\mathcal{A}}$ και ... και $< t_n, s_n > \in E^{\mathcal{A}}$,
τότε $< f^{\mathcal{A}}(t_1, ..., t_n), f^{\mathcal{A}}(s_1, ..., s_n) > \in E^{\mathcal{A}}$.

Με $[t]$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $t \in O(\Gamma_1^*)$. Ορίζουμε τη δομή $\mathcal{A}'$ για τη Γ_1^* ως εξής:

1) $|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}|/E^{\mathcal{A}} = \{[t] : t \in |\mathcal{A}|\}$

2) $< [t_1], ..., [t_n] > \in P^{\mathcal{A}'}$ ανν $< t_1, ..., t_n > \in P^{\mathcal{A}}$

3) $f^{\mathcal{A}'}([t_1], ..., [t_n]) = [f^{\mathcal{A}}(t_1, ..., t_n)]$

4) $c^{\mathcal{A}'} = [c]$.

(Παρατηρούμε ότι οι ορισμοί στα 2), 3) ανωτέρω είναι καλοί, διότι οι $P^{\mathcal{A}}$, $f^{\mathcal{A}}$ είναι συμβιβαστές με την $E^{\mathcal{A}}$.)
Έστω $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{A}'|$ με $h(t) = [t]$ και v' η αποτίμηση στην $\mathcal{A}'$ που ορίζεται ως $v' = h \circ v$. Με επαγωγή στο $T(\Gamma_1^*)$ μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1^*)$:

$$\mathcal{A}' \models \varphi[v'] \text{ ανν } \mathcal{A} \models \varphi_E^{\approx}[v].$$

Συνεπώς για κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1^*)$: $\varphi \in \Sigma$ ανν $\mathcal{A}' \models \varphi[v']$.
Αφού $T \subseteq \Sigma$, η v' ικανοποιεί κάθε στοιχείο του T στην $\mathcal{A}'$. Αν περιορίσουμε την $\mathcal{A}'$ στην αρχική γλώσσα Γ_1, δηλ. πάρουμε την δομή $\mathcal{A}' \lceil \Gamma_1$, δεν αλλάζει

ουσιαστικά κάτι, δηλ. η v' ικανοποιεί το T στην νέα δομή $\mathcal{A}' \lceil \Gamma_1$ (δες άσκηση 64). Άρα το T είναι ικανοποιήσιμο.

Όπως στον προτασιακό λογισμό, χρησιμοποιώντας το θεώρημα πληρότητας και το θεώρημα εγκυρότητας, μπορούμε να αποδείξουμε το

Θεώρημα 3.4.3 (Θεώρημα Συμπάγειας) *Έστ*

Θεώρημα 3.4.5 *Δεν υπάρχει σύνολο προτάσεων* Π *τέτοιο που μια δομή είναι μοντέλο του* Π *ανν είναι πεπερασμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ τέτοιο που για κάθε δομή $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \Pi \ \text{ ανν } \ \mathcal{A} \text{ πεπερασμένη.}$$

Τότε το Π έχει πεπερασμένα μοντέλα, οσοδήποτε μεγάλα θέλουμε, και συνεπώς, λόγω του θεωρήματος 3.4.4, έχει ένα άπειρο μοντέλο, αντίφαση. Το ζητούμενο έπεται.

3.5 Κανονική ποσοδεικτική μορφή

Είδαμε ότι κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με ένα σε κανονική διαζευκτική μορφή. Θα δείξουμε ότι κάτι αντίστοιχο ισχύει στην κατηγορηματική λογική. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.5.1 (Θεώρημα Αλφαβητικών Παραλλαγών) *Για κάθε τύπο* φ, *μεταβλητή* x *και όρο* t *υπάρχει τύπος* $\overline{\varphi}$ *τέτοιος που*

α) $\vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi \leftrightarrow \overline{\varphi}$ *και*

β) η x *είναι αντικαταστάσιμη από τον* t *στον* $\overline{\varphi}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής για το $T(\Gamma_1)$. Θ' αναφερθούμε λεπτομερειακά μόνο στην περίπτωση που ο φ είναι της μορφής $\forall y\psi$. Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι υπάρχει τύπος $\overline{\psi}$ τέτοιος που $\vdash_{\mathcal{A}_1} \psi \leftrightarrow \overline{\psi}$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον $\overline{\psi}$.
<u>Πρώτη περίπτωση.</u> Αν $x = y$ ή η y δεν εμφανίζεται στον t, τότε θέτουμε $\overline{\varphi} = \forall y\overline{\psi}$. Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν τα α), β) για τον $\overline{\varphi}$.
<u>Δεύτερη περίπτωση.</u> Αν δεν είμαστε στην πρώτη περίπτωση, θεωρούμε μεταβλητή z που δεν εμφανίζεται ούτε στον $\overline{\psi}$ ούτε στον t και είναι διαφορετική από την x και θέτουμε $\overline{\varphi} = \forall z\overline{\psi}^y_z$.
Αφού η z δεν εμφανίζεται στον t και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον $\overline{\psi}$, η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον $\overline{\varphi}$, δηλ. ισχύει το β). Μένει να δείξουμε ότι αληθεύει το α).

1) Από την επαγωγική υπόθεση, $\psi \vdash_{\mathcal{A}_1} \overline{\psi}$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 49, έχουμε ότι $\forall y\psi \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y\overline{\psi}$. Αλλά $\forall y\overline{\psi} \vdash_{\mathcal{A}_1} \overline{\psi}^y_z$, αφού η y είναι αντικαταστάσιμη από την z στον $\overline{\psi}$. Άρα, λόγω του θεωρήματος γενίκευσης, $\forall y\overline{\psi} \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall z\overline{\psi}^y_z$, οπότε $\forall y\psi \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall z\overline{\psi}^y_z$.

2) Επειδή η z δεν εμφανίζεται στον $\overline{\psi}$, λόγω της Άσκησης 58,

$$\forall z \overline{\psi}^y_z \vdash_{\mathcal{A}_1} \overline{\psi}^{y\ z}_{z\ y} = \overline{\psi}.$$

Αλλά $\overline{\psi} \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi$, από την επαγωγική υπόθεση. Συνεπώς $\forall z \overline{\psi}^y_z \vdash_{\mathcal{A}_1} \psi$ και άρα $\forall z \overline{\psi}^y_z \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y \psi$, λόγω του θεωρήματος γενίκευσης.

Ορισμός 3.5.1 *Λέμε ότι ο τύπος φ είναι σε 'κανονική ποσοδεικτική μορφή' ανν ο φ είναι 'ανοικτός', δηλ. δεν έχει καθόλου ποσοδείκτες, ή ο φ είναι της μορφής $Q_1 y_1 ... Q_n y_n \psi$, όπου $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, ψ ανοικτός και το Q_i είναι $\forall$ ή $\exists$, $i = 1, ..., n$.*

Θεώρημα 3.5.2 *Κάθε τύπος είναι λογικά ισοδύναμος με ένα τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής γιά το $T(\Gamma_1)$.

1) Έστω φ ατομικός. Τότε ο φ είναι ανοικτός, άρα ο φ είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή.

2) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\forall x \psi$ και ο ψ είναι λογικά ισοδύναμος με τον ψ^* που είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή. Τότε $\forall x \psi \equiv \forall x \psi^*$ (λόγω της Άσκησης 49 και του θεωρήματος πληρότητας). Όμως ο $\forall x \psi^*$ είναι προφανώς σε κανονική ποσοδεικτική μορφή, οπότε το ζητούμενο ισχύει.

3) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg \psi$ και ο ψ είναι λογικά ισοδύναμος με τον ψ^* που είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή. Τότε $\neg \psi \equiv \neg \psi^*$. Όμως ο $\neg \psi^*$ είναι λογικά ισοδύναμος με ένα τύπο ψ^{**} σε κανονική ποσοδεικτική μορφή, αφού για κάθε φ, x:

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi \ \text{ και } \ \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi.$$

Άρα ο φ είναι λογικά ισοδύναμος με ένα τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή.

4) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$ και $\psi \equiv \psi^*$, $\chi \equiv \chi^*$, όπου ψ^*, χ^* είναι τύποι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή. Λόγω του Θεωρήματος 3.5.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές που εμφανίζονται σε ποσοδείκτες στον ψ δεν εμφανίζονται στο χ και αντίστροφα. Προφανώς $\psi \to \chi \equiv \psi^* \to \chi^*$. Από τα Παραδείγματα στις σελίδες 55, 56 και το Θεώρημα Εγκυρότητας, έχουμε ότι για κάθε φ_1, φ_2, x, αν η x είναι δεσμευμένη στο φ_1, τότε

$$\begin{aligned} \varphi_1 \to \forall x \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \to \varphi_2) \quad (1)\\ \exists x \varphi_2 \to \varphi_1 \equiv \forall x(\varphi_2 \to \varphi_1) \quad (2). \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι αν η x είναι δεσμευμένη στο φ_1, τότε

$$\begin{aligned} \varphi_1 \to \exists x \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \to \varphi_2) \quad (3)\\ \forall x \varphi_2 \to \varphi_1 \equiv \exists x(\varphi_2 \to \varphi_1) \quad (4). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις (1) – (4) μπορούμε να βρούμε ένα τύπο φ^* σε κανονική ποσοδεικτική μορφή τέτοιο που $\varphi^* \equiv \psi^* \to \chi^*$. Τότε $\varphi \equiv \varphi^*$, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα. Έστω ότι οι x, y δεν εμφανίζονται στο χ και η z δεν εμφανίζεται στον ψ. Υπάρχουν τρεις τύποι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμοι με τον τύπο $\forall x \exists y \psi \to \exists z \chi$, ανάλογα με την σειρά που θα εφαρμόσουμε τις (1) – (4).

$$\begin{array}{llll}
\text{α)} & \forall x \exists y \psi \to \exists z \chi & \equiv & \exists z(\forall x \exists y \psi \to \chi)\\
& & \equiv & \exists z \exists x(\exists y \psi \to \chi)\\
& & \equiv & \exists z \exists x \forall y(\psi \to \chi)\\
\text{β)} & \forall x \exists y \psi \to \exists z \chi & \equiv & \exists x(\exists y \psi \to \exists z \chi)\\
& & \equiv & \exists x \forall y(\psi \to \exists z \chi)\\
& & \equiv & \exists x \forall y \exists z(\psi \to \chi)\\
\text{γ)} & \forall x \exists y \psi \to \exists z \chi & \equiv & \exists x(\exists y \psi \to \exists z \chi\\
& & \equiv & \exists x \exists z(\exists y \psi \to \chi)\\
& & \equiv & \exists x \exists z \forall y(\psi \to \chi).
\end{array}$$

3.6 Στοιχεία Θεωρίας Μοντέλων

Ορισμός 3.6.1 *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δομές για την Γ_1 και $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$. Λέμε ότι η h είναι*

1) 'ομομορφισμός της $\mathcal{A}$ στη $\mathcal{B}$' ανν ισχύουν τα εξής:

α) Για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P και $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{A}|$:

$$< a_1, ..., a_n > \in P^{\mathcal{A}} \quad \text{ανν} \quad < h(a_1), ..., h(a_n) > \in P^{\mathcal{B}}$$

β) Για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f και $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{A}|$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$$

γ) Για κάθε σταθερά c: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

(Αντί για το α) λέμε η h 'διατηρεί τις σχέσεις' και αντί για το β) λέμε η h 'διατηρεί τις συναρτήσεις'.)

2) *'ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ εντός της $\mathcal{B}$' ανν είναι 1-1 και ομομορφισμός της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{B}$*

3) *'ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ επί της $\mathcal{B}$' ανν είναι 1-1, επί του $|\mathcal{B}|$ και ομομορφισμός της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{B}$.*

Λέμε ότι οι $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ είναι 'ισόμορφες', και γράφουμε $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ανν υπάρχει ισομορφισμός h της $\mathcal{A}$ επί της $\mathcal{B}$ (που τον συμβολίζουμε $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$).

Παραδείγματα. α) Θεωρούμε τη γλώσσα $\Gamma_1^{\pi\pi}$ με μόνο δυο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $\oplus, \odot$ και τις δομές $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ για την $\Gamma_1^{\pi\pi}$ που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} |\mathcal{A}| = \mathbf{N}, & \oplus^{\mathcal{A}}, \odot^{\mathcal{A}} \text{ οι συνηθισμένες πράξεις στο } \mathbf{N} \\ |\mathcal{B}| = \{\alpha, \pi\}, & \oplus^{\mathcal{B}} = \{<\alpha,\alpha,\alpha>, <\alpha,\pi,\pi>, <\pi,\alpha,\pi>, <\pi,\pi,\alpha>\} \\ & \odot^{\mathcal{B}} = \{<\alpha,\alpha,\alpha>, <\alpha,\pi,\alpha>, <\pi,\alpha,\alpha>, <\pi,\pi,\pi>\}. \end{array}$$

Τότε η συνάρτηση $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ με

$$h(n) = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \pi, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι ομομορφισμός της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{B}$. Πράγματι, από τον ορισμό της h βλέπουμε ότι για κάθε $m, n \in |\mathcal{A}|$:

$$h(m \oplus^{\mathcal{A}} n) = h(m) \oplus^{\mathcal{B}} h(n) \quad \text{και} \quad h(m \odot^{\mathcal{A}} n) = h(m) \odot^{\mathcal{B}} h(n).$$

β) Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ οι δομές για την Γ_1^{δ} που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} |\mathcal{A}| = \mathbf{N} - \{0\}, & \prec^{\mathcal{A}} \text{ η συνήθης σχέση "μικρότερος από" στο } \mathbf{N} - \{0\}, \\ |\mathcal{B}| = \mathbf{N}, & \prec^{\mathcal{B}} \text{ η συνήθης σχέση "μικρότερος από" στο } \mathbf{N}. \end{array}$$

Τότε η συνάρτηση $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ με $h(n) = n - 1$ είναι ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ επί της $\mathcal{B}$, όπως εύκολα επαληθεύεται.

Ο προηγούμενος ορισμός μας θυμίζει αντίστοιχους αλγεβρικούς ορισμούς. Το επόμενο θεώρημα τον συνδέει με σημασιολογικές έννοιες.

Θεώρημα 3.6.1 *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δομές για την Γ_1, h ομομορφισμός της $\mathcal{A}$ στη $\mathcal{B}$ και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Τότε*

α) Για κάθε όρο t: $h(\overline{v}(t)) = \overline{h \circ v}(t)$

β) Για κάθε ανοικτό τύπο φ χωρίς το $\approx$

$$\mathcal{A} \equiv \varphi[v] \ \ \textit{ανν} \ \ \mathcal{B} \models \varphi[h \circ v]$$

γ) Αν h 1-1, τότε για κάθε ανοικτό τύπο φ

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \ \ \textit{ανν} \ \ \mathcal{B} \models \varphi[h \circ v]$$

δ) Αν h επί, τότε για κάθε τύπο φ χωρίς το $\approx$

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \ \ \textit{ανν} \ \ \mathcal{B} \models \varphi[h \circ v].$$

Απόδειξη. α) Άσκηση 70.
β) Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής για το σύνολο των τύπων που κατασκευάζονται από ατομικούς χωρίς το $\approx$ μέσω των συμβόλων $\neg, \rightarrow$.

1) Έστω ατομικός τύπος της μορφής $P(t_1, ..., t_n)$. Τότε

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A} \models P(t_1, ..., t_n)[v] & \text{ανν} & <\overline{v}(t_1), ..., \overline{v}(t_n)> \in P^{\mathcal{A}} \text{ (ορ. Tarski)} \\ & \text{ανν} & < h(\overline{v}(t_1)), ..., h(\overline{v}(t_n)) > \in P^{\mathcal{B}} \text{ (} h \text{ ομομορφ.)} \\ & \text{ανν} & < \overline{h \circ v}(t_1), ..., \overline{h \circ v}(t_n) > \in P^{\mathcal{B}} \text{ (από α))} \\ & \text{ανν} & \mathcal{B} \models P(t_1, ..., t_n)[h \circ v] \text{ (ορ. Tarski)} \end{array}$$

2) Έστω ότι φ της μορφής $\neg\psi$, όπου $\mathcal{A} \models \psi[v]$ ανν $\mathcal{B} \models \psi[h \circ v]$. Τότε, λόγω του ορισμού του Tarski,

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \text{ ανν } \mathcal{A} \not\models \psi[v] \text{ ανν } \mathcal{B} \not\models \psi[h \circ v] \text{ ανν } \mathcal{B} \models \varphi[h \circ v].$$

3) Αν φ της μορφής $\psi \rightarrow \chi$, τότε δουλεύουμε όπως στο 2).

γ) Δουλεύουμε όπως στο β), χωρίς ν' αποκλείεται ο τύπος να είναι της μορφής $t_1 \approx t_2$, όπου t_1, t_2 όροι. Όμως

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A} \models t_1 \approx t_2[v] & \text{ανν} & \overline{v}(t_1) = \overline{v}(t_2) & \text{(από ορ. Tarski)} \\ & \text{ανν} & h(\overline{v}(t_1)) = h(\overline{v}(t_2)) & \text{(αφού } h \text{ 1-1)} \\ & \text{ανν} & \overline{h \circ v}(t_1) = \overline{h \circ v}(t_2) & \text{(από α))} \\ & \text{ανν} & \mathcal{B} \models t_1 \approx t_2[h \circ v] & \text{(από ορ. Tarski),} \end{array}$$

οπότε έχουμε το ζητούμενο.
δ) Δουλεύουμε όπως στο β). Η περίπτωση που μένει να θεωρήσουμε είναι όταν φ της μορφής $\forall x \psi$ και $\mathcal{A} \models \psi[v]$ ανν $\mathcal{B} \models \psi[h \circ v]$.

1) Εστω ότι $\mathcal{B} \models \forall x\psi[h \circ v]$. Τότε $\mathcal{B} \models \psi[(h \circ v)(x|b)]$ για κάθε $b \in |\mathcal{B}|$. Αφού η h είναι επί, έπεται ότι $\mathcal{B} \models \psi[(h \circ v)(x|h(a))]$ για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$. Όμως οι συναρτήσεις $(h \circ v)(x|h(a))$, $h \circ (v(x|a))$ είναι ίσες, άρα $\mathcal{B} \models \psi[h \circ (v(x|a))]$ για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$, οπότε, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$ για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$. Τότε όμως έχουμε ότι $\mathcal{A} \models \forall x\psi[v]$ από τον ορισμό του Tarski, δηλ. το ζητούμενο.

2) Όπως στο 1), δείχνουμε ότι αν $\mathcal{B} \not\models \forall x\psi[h \circ v]$, τότε $\mathcal{A} \not\models \forall x\psi[v]$, άρα ισχύει η ζητούμενη ισοδυναμία.

Παρατήρηση. Συνέπεια του προηγούμενου Θεωρήματος είναι ότι αν $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, τότε για κάθε τύπο φ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \;\text{ ανν }\; \mathcal{B} \models \varphi[h \circ v].$$

Ειδικότερα, για κάθε πρόταση φ: $\mathcal{A} \models \varphi$ ανν $\mathcal{B} \models \varphi$.

Ορισμός 3.6.2 *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δομές για την Γ_1. Λέμε ότι*

1) η $\mathcal{A}$ είναι 'υποδομή' της $\mathcal{B}$, και γράφουμε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, ανν $|\mathcal{A}| \subseteq |\mathcal{B}|$ και

α) για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P: $P^{\mathcal{A}} = P^{\mathcal{B}} \cap |\mathcal{A}|^n$

β) για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f: $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}} \lceil |\mathcal{A}|^n$

γ) για κάθε σταθερά c: $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

2) οι $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ είναι 'στοιχειωδώς ισοδύναμες', και γράφουμε $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, ανν οι $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις, δηλ. για κάθε πρόταση φ:

$$\mathcal{A} \models \varphi \textit{ ανν } \mathcal{B} \models \varphi.$$

Παράδειγμα δομών $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ για τις οποίες $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ έχουμε από το Παράδειγμα β), σελ. 69. Στην περίπτωση αυτή ισχύει και $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, δεν ισχύει όμως γενικά ότι αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, τότε $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Πράγματι, για τις δομές $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ της Άσκησης 39 έχουμε προφανώς ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, αλλά δεν ισχύει ούτε καν $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, αφού υπάρχει πρόταση φ τέτοια που $\mathcal{A} \models \varphi$ αλλά $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.
Από την αμέσως προηγούμενη Παρατήρηση έχουμε ότι αν $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ τότε $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, έστω $\mathcal{M}$ non-standard μοντέλο της αριθμητικής (Άσκηση 66). Θα δείξουμε ότι $\mathcal{M} \not\cong \mathcal{N}$, ενώ προφανώς ισχύει $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Έστω λοιπόν ότι $h : \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. Από την υπόθεση, υπάρχει αποτίμηση v στην $\mathcal{M}$ τέτοια που

$$\mathcal{M} \models x_0 \neq \underline{n}[v] \text{ για κάθε } n \in \mathbf{N}.$$

Τότε, λόγω της Παρατήρησης,

$$\mathcal{N} \models x_0 \neq \underline{n}[h \circ v] \text{ για κάθε } n \in \mathbf{N},$$

$$\text{δηλ.} \quad \overline{h \circ v}(x_0) \neq \overline{h \circ v}(\underline{n}) \text{ για κάθε } n \in \mathbf{N}.$$

Με (συνηθισμένη) επαγωγή δείχνουμε ότι $\overline{h \circ v}(\underline{n}) = n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αρα $\overline{h \circ v}(x_0) \neq n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, πράγμα αδύνατο, αφού $\overline{h \circ v}(x_0) \in |\mathcal{N}| = \mathbf{N}$. Συνεπώς δεν υπάρχει $h : \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Ορισμός 3.6.3 *Έστω τώρα $\mathcal{A}$ δομή για την Γ_1, $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{A}|$ και $\varphi(x_1, ..., x_n)$ τύπος – γράφοντας $\varphi(x_1, ..., x_n)$ εννοούμε ότι όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον φ είναι ανάμεσα στις $x_1, ..., x_n$. Θα λέμε ότι*

1) *ο φ 'ικανοποιείται από τα $a_1, ..., a_n$ στην $\mathcal{A}$', και θα γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$, αν υπάρχει αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ τέτοια που $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ και $v(x_i) = a_i$ για $i = 1, .., n$ (ή, ισοδύναμα, για κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$, αν $v(x_i) = a_i$ για $i = 1, ..., n$, τότε $\mathcal{A} \models \varphi[v]$)*

2) *ο φ 'ορίζει την σχέση R στην $\mathcal{A}$' ανν ισχύει*

$$R = \{< a_1, ..., a_n >\in |\mathcal{A}|^n : \mathcal{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]\}$$

3) *η R είναι 'ορίσιμη στην $\mathcal{A}$', όπου $R \subseteq |\mathcal{A}|^n$, ανν υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, ..., x_n)$ που ορίζει την R στην $\mathcal{A}$.*

Παραδείγματα. Θεωρούμε τη δομή $\mathcal{N}$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$

α) Η σχέση $\{< m, n >\in \mathbf{N}^2 : m < n\}$ ορίζεται στην $\mathcal{N}$ από τον τύπο $\exists x_3 x_1 + x_3' \approx x_2$.

β) Για τυχόν $n \in \mathbf{N}$, το σύνολο $\{n\}$ είναι ορίσιμο στην $\mathcal{N}$ από τον τύπο $x_1 \approx \underline{n}$.

γ) Το σύνολο των πρώτων αριθμών ορίζεται στην $\mathcal{N}$ από τον τύπο

$$\exists x_3 \mathbf{0}'' + x_3 \approx x_1 \wedge \forall x_2 \forall x_3 (x_1 \approx x_2 . x_3 \rightarrow x_2 \approx \mathbf{0}' \vee x_3 \approx \mathbf{0}').$$

Για να δείξουμε ότι μια σχέση δεν είναι ορίσιμη σε μια δομή χρησιμοποιούμε το ακόλουθο

Πόρισμα 3.6.1 *Έστω $\mathcal{A}$ δομή για την Γ_1, h αυτομορφισμός της $\mathcal{A}$, δηλ. $h : \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$, και $R \subseteq |\mathcal{A}|^n$ ορίσιμη στην $\mathcal{A}$. Τότε για κάθε $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{A}|$:*

$$< a_1, ..., a_n >\in R \;\; \text{ανν} \;\; < h(a_1), ..., h(a_n) >\in R.$$

Απόδειξη. Έστω φ ο τύπος που ορίζει την R στην $\mathcal{A}$ και v τυχούσα αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ με $v(x_i) = a_i$, $i = 1, ..., n$. Τότε

$$\begin{array}{llll} < a_1, ..., a_n > \in R & \text{ανν} & \mathcal{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] & (\text{αφού ο } \varphi \text{ ορίζει την } R) \\ & \text{ανν} & \mathcal{A} \models \varphi[v] & (\text{λόγω συμβολισμού}) \\ & \text{ανν} & \mathcal{A} \models \varphi[h \circ v] & (\text{λόγω Θεωρ. 3.6.1}) \\ & \text{ανν} & \mathcal{A} \models \varphi[h(a_1), ..., h(a_n)] & (\text{συμβολισμός}) \\ & \text{ανν} & < h(a_1), ..., h(a_n) > \in R, & \end{array}$$

δηλ. ισχύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{R}_\delta$ η δομή για την Γ_1^δ που ορίζεται ως εξής: $|\mathcal{R}_\delta| = \mathbf{R}$ και $\prec^{\mathcal{R}_\delta} =$ η συνήθης σχέση "μικρότερος από" στο $\mathbf{R}$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Πόρισμα θα δείξουμε ότι το $\mathbf{N}$ δεν είναι ορίσιμο στην $\mathcal{R}_\delta$ (– το $\mathbf{N}$ θεωρείται ως μονομελής σχέση $R \subseteq |\mathcal{R}_\delta| = \mathbf{R}$). Έστω λοιπόν ότι το $\mathbf{N}$ είναι ορίσιμο. Τότε, λόγω του Πορίσματος 3.6.1, για κάθε $a \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$a \in \mathbf{N} \ \text{ ανν } \ h(a) \in \mathbf{N},$$

όπου h τυχών αυτομορφισμός της $\mathcal{R}_\delta$. Η συνάρτηση $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $h(x) = x^3$ είναι εύκολο να δούμε ότι είναι αυτομορφισμός της $\mathcal{R}_\delta$. Άρα για κάθε $a \in \mathbf{R}$:

$$a \in \mathbf{N} \ \text{ ανν } \ a^3 \in \mathbf{N}.$$

Αυτό όμως δεν ισχύει, αφού, π.χ., $2 \in \mathbf{N}$ ενώ $\sqrt[3]{2} \notin \mathbf{N}$. Άρα το $\mathbf{N}$ δεν είναι ορίσιμο στην $\mathcal{R}_\delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

28. Βρείτε τα δενδροδιαγράμματα των τύπων $\exists x_1(Q(x_1) \to \forall x_2 Q(x_2))$,

    $(\exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2)$, $[(\forall x(\varphi \to \psi) \wedge \exists x\varphi) \to \exists x\psi]$.

29. Ποιές μεταβλητές εμφανίζονται ελεύθερες σε κάθε ένα από τους ακόλουθους τύπους; Ποιοί από αυτούς είναι προτάσεις;
    $(\forall x_1 Q(x_1) \leftrightarrow \exists x_2 Q(x_2))$ $\quad (\exists x_1 Q(x_1) \wedge Q(x_1))$ $\quad (Q(x_2) \to \forall x_1 P(x_1, x_2))$
    $\exists x_3(Q(x_3) \to \forall x_4 Q(x_4))$ $\quad (x_1 \approx x_2 \vee x_1 \not\approx x_2)$.

30. Αποδείξτε ότι κάθε τύπος της Γ_1 έχει τον ίδιο αριθμό δεξιών και αριστερών παρενθέσεων.

31. Ποιοί τύποι μετά την απαλοιφή των παρενθέσεων γράφονται

$$\forall x_1 Q(x_1) \wedge P(x_1, x_2) \to \exists x_2 \neg P(x_1, x_2),$$
$$\neg \exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2) \vee \forall x_1 Q(x_1) \leftrightarrow Q(x_2);$$

32. α) Βρείτε τους τύπους της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που αντιστοιχούν στις προτάσεις: "Υπάρχει ένα σύνολο που δεν έχει στοιχεία", "Κάθε σύνολο είναι στοιχείο ενός συνόλου".
β) Βρείτε τους τύπους της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που αντιστοιχούν στις προτάσεις: "Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός που δεν είναι ο επόμενος κανενός φυσικού αριθμού", "Δυο τυχόντες φυσικοί αριθμοί έχουν γινόμενο μεγαλύτερο από το άθροισμά τους".

33. Θεωρούμε τους ακόλουθους τύπους της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$:

$$x_1 \in x_2 \vee x_1 \in x_3,\ \exists x_4 (x_4 \notin x_1 \wedge x_4 \notin x_3)$$
$$x_1 \in x_2 \wedge x_2 \in x_3 \to x_1 \in x_3,\ \forall x_2 x_1 \in x_2.$$

α) Έστω v αποτίμηση στη δομή $\mathcal{N}_\sigma$ τέτοια που $v(x_1) = 2$, $v(x_2) = 4$ και $v(x_3) = 7$. Ποιοί από τους ανωτέρω τύπους αληθεύουν για την v στην $\mathcal{N}_\sigma$;

β) Έστω v^* αποτίμηση στη δομή $\mathcal{N}_\sigma^*$ τέτοια που $v^*(x_1) = 5$, $v^*(x_2) = 1$ και $v^*(x_3) = 3$. Ποιοί από τους προηγούμενους τύπους αληθεύουν για την v^* στην $\mathcal{N}_\sigma^*$;

34. Έστω v αποτίμηση στη δομή $\mathcal{N}^*$ για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που $v(x_1) = -3$, $v(x_2) = -4$ και $v(x_3) = 0$.

α) Προσδιορίστε τις τιμές των ακόλουθων όρων για τη v στην $\mathcal{N}^*$:

$$(x_1' \oplus x_2'')' \oplus (x_1 \odot x_3),\ x_2 \odot (x_1 \oplus (x_3'' \odot \mathbf{0})).$$

β) Ποιοί από τους ακόλουθους τύπους αληθεύουν για τη v στην $\mathcal{N}^*$;

$$\exists x_1\ \mathbf{0}'' \odot x_1 \approx x_2,\ \forall x_1\ x_1 \not\approx \mathbf{0} \to x_3 \approx x_2.$$

35. Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ είναι αληθείς στην δομή $\mathcal{N}$;

$$\exists x_1\ x_1 \oplus x_1 \approx \mathbf{0},\ \forall x_1\ x_1 \approx x_1 \vee \exists x_0 x_0 \not\approx x_0,$$
$$\forall x_1\ x_1 \not\approx x_1 \to \forall x_1 \forall x_2\ x_1 \oplus x_2 \approx x_2 \oplus x_1.$$

36. Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_1)$ και $\mathcal{A}$ δομή γιά την Γ_1. Είναι αλήθεια ότι αν κάθε στοιχείο του Σ είναι ικανοποιήσιμο στην $\mathcal{A}$ τότε και το Σ είναι ικανοποιήσιμο στην $\mathcal{A}$;

37. Έστω φ η πρόταση της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που εκφράζει "Για κάθε σύνολο υπάρχει το δυναμοσύνολό του", δηλ. η

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (x_3 \in x_2 \leftrightarrow \forall x_4 (x_4 \in x_3 \to x_4 \in x_1)).$$

Εξετάστε αν $\mathcal{N}_\sigma \models \varphi$ ή όχι.

38. Έστω $\mathcal{N}_\delta$ η δομή για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \alpha) & |\mathcal{N}_\delta| = \mathbf{N} \\ \beta) & \in^{\mathcal{N}_\delta} = \{< m, n > \in \mathbf{N}^2 : m \text{ διαιρεί τον } n\}. \end{array}$$

Έστω τώρα ψ η πρόταση που εκφράζει ότι "Για τυχόντα σύνολα x, y υπάρχει το σύνολο $\{x, y\}$", δηλ. η

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 (x_4 \in x_3 \leftrightarrow x_4 approx x_1 \lor x_4 \approx x_2).$$

Εξετάστε αν $\mathcal{N}_\delta \models \psi$ ή όχι.

39. Έστω Γ_1^δ η γλώσσα της θεωρίας διάταξης, δηλ. η πρωτοβάθμια γλώσσα με μόνο μη λογικό σύμβολο το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $\prec$.
Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ οι δομές για την Γ_1^δ που ορίζονται ως εξής:
$|\mathcal{A}| = \mathbf{N}$, $|\mathcal{B}| = \mathbf{Z}$, $|\mathcal{C}| = \mathbf{Q}$ και $\prec^{\mathcal{A}} = <^{\mathbf{N}}$, $\prec^{\mathcal{B}} = <^{\mathbf{Z}}$, $\prec^{\mathcal{C}} = <^{\mathbf{Q}}$.
Βρείτε προτάσεις φ, ψ της Γ_1^δ τέτοιες που

$$\begin{array}{l} \alpha)\ \mathcal{B} \models \varphi \ \text{ και } \ \mathcal{A} \models \neg\varphi \\ \beta)\ \mathcal{C} \models \psi \ \text{ και } \ \mathcal{B} \models \neg\psi. \end{array}$$

40. Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_1)$. Δείξτε ότι για κάθε φ, ψ:

α) $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ανν $\Sigma \models \varphi \to \psi$

β) $\varphi \equiv \psi$ ανν $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

41. Δείξτε ότι για κάθε διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P:

$$\begin{array}{c} \exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2) \models \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2) \\ \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2) \not\models \exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2). \end{array}$$

42. Θεωρούμε τις ακόλουθες προτάσεις της ελληνικής γλώσσας:

    1) Για κάθε σύνολο x υπάρχει σύνολο y με πληθάριθμο μεγαλύτερο εκείνου του x.
    2) Αν x υποσύνολο του y, τότε ο πληθάριθμος του x είναι μικρότερος ή ίσος εκείνου του y.
    3) Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του V.
    4) Το V δεν είναι σύνολο.

    Χρησιμοποιώντας αντίστοιχες προτάσεις μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, δείξτε ότι οι 1) – 3) συνεπάγονται λογικά την 4).

43. Θεωρούμε τις ακόλουθες προτάσεις της ελληνικής γλώσσας:

    1) Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος αριθμός.
    2) Ο n είναι ακέραιος αριθμός.
    3) Ο n είναι φυσικός αριθμός.

    Χρησιμοποιώντας αντίστοιχες προτάσεις μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, δείξτε ότι οι 1), 2) δεν συνεπάγονται λογικά την τρίτη.

44. Δείξτε ότι για κάθε φ, ψ: $\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \models \forall x\psi$.

45. Δείξτε ότι αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ, τότε $\varphi \models \forall x\varphi$.

46. Δείξτε ότι για κάθε φ: ο φ είναι έγκυρος ανν ο $\forall x\varphi$ είναι έγκυρος.

47. Έστω $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ τέτοιο που για κάθε $\varphi \in \Pi(\Gamma_1)$: $\Pi \models \varphi$ ή $\Pi \models \neg\varphi$. Έστω επίσης $\mathcal{A}$ ένα μοντέλο του Π. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varphi \in \Pi(\Gamma_1)$: $\mathcal{A} \models \varphi$ ανν $\Pi \models \varphi$.

48. Ποιοί από τους ακόλουθους τύπους είναι λογικά αξιώματα; (P είναι μονομελές και Q διμελές κατηγορηματικό σύμβολο.)
    $[(\forall xP(x) \to \forall yP(y)) \to P(z)] \to [\forall xP(x) \to (\forall yP(y) \to P(z))]$,
    $\forall y[\forall x(P(x) \to P(x)) \to (P(c) \to P(c))]$, $\forall x\exists yQ(x,y) \to \exists yQ(y,y)$.

49. Δείξτε ότι για κάθε φ, ψ:

    α) $\vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x\varphi \to \exists x\varphi$ και
    β) αν $\vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi \to \psi$, τότε $\vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x\varphi \to \forall x\psi$.

50. Δείξτε ότι για τυχόντα κατηγορηματικά σύμβολα P, Q:

$$\{Q(x), \forall y(Q(y) \to \forall z P(z))\} \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x P(x).$$

51. Δείξτε ότι για τυχόν διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P:

    α) $\vdash_{\mathcal{A}_1} \forall x \forall y \forall z(x{\approx}y \to (y{\approx}z \to x{\approx}z))$ και

    β) $\vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y_1 \forall y_2 \forall z_1 \forall z_2 [y_1{\approx}z_1 \to (y_2 \approx z_2 \to (P(y_1, y_2) \to P(z_1, z_2)))]$.

52. Δείξτε ότι γιά τυχόντες όρους t, r, s:

    α) $\vdash_{\mathcal{A}_1} t \approx t$

    β) $\vdash_{\mathcal{A}_1} t \approx s \to s \approx t$

    γ) $\vdash_{\mathcal{A}_1} t \approx s \to (s \approx r \to t \approx r)$

    δ) $\vdash_{\mathcal{A}_1} s \approx t \to (r \approx t \to s \approx r)$.

53. Δείξτε ότι γιά οποιονδήποτε τύπο φ, αν η x είναι αντικαταστάσιμη από την y στον φ, τότε

    $$\vdash_{\mathcal{A}_1} x \approx y \to (\varphi \to \varphi^*),$$

    όπου φ^* είναι ο τύπος που παίρνουμε από το φ αντικαθιστώντας την x σε μερικές ή όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της με τη y.

54. Δείξτε ότι γιά τυχόν διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P:

    $$\forall x \forall y P(x, y) \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y \forall x P(y, x).$$

55. Δείξτε ότι για τυχόν μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο Q:

    $$\vdash_{\mathcal{A}_1} Q(y) \leftrightarrow \forall x(x{\approx}y \to Q(x)).$$

56. Αποδείξτε το Θεώρημα γενίκευσης σταθερών.
    (Υπόδειξη: Έστω ότι $\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi$ είναι μια τυπική απόδειξη από το T και y μια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται σε κανένα από τους $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Δείξτε ότι η ακολουθία $(\varphi_1)^c_y, ..., (\varphi_n)^c_y$ είναι μια τυπική απόδειξη του φ^c_y από το T.)

57. Δείξτε με παραδείγματα ότι οι συνθήκες που υπάρχουν στα Θεωρήματα 3.3.5, 3.3.6. για το c είναι απαραίτητες.

58. Έστω φ τύπος και x, y μεταβλητές. Δείξτε ότι

    α) Δεν ισχύει πάντα ότι $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$.

β) Αν η y δεν εμφανίζεται καθόλου στο φ, τότε η y είναι αντικαταστάσιμη από την x στο φ^x_y και $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$.

59. Αποδείξτε το εξής πόρισμα του θεωρήματος γενίκευσης σταθερών: Αν $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi^y_c$ και η c δεν εμφανίζεται σε κανένα στοιχείο του $T \cup \{\varphi\}$, τότε $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \forall y\varphi$.

60. Δείξτε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι τυπικά θεωρήματα του $\mathcal{A}_1$ για κάθε φ, ψ, χ:

    1) $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
    2) $\forall x\varphi \vee \forall x\psi \to \forall x(\varphi \vee \psi)$
    3) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \to \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$
    4) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
    5) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$.

61. Δείξτε ότι τα λογικά αξιώματα είναι έγκυροι τύποι και ότι ο κανόνας $M.P.$ διατηρεί τη λογική συνεπαγωγή (δηλ. αν $T \models \psi$ και $T \models \psi \to \chi$, τότε $T \models \chi$).

62. Δείξτε ότι το δεύτερο μέρος του θεωρήματος εγκυρότητας συνεπάγεται το πρώτο.

63. Δείξτε ότι τα δυο μέρη του θεωρήματος πληρότητας είναι ισοδύναμα.

64. Έστω Γ_1, Γ_1' πρωτοβάθμιες γλώσσες τέτοιες που η Γ_1' είναι επέκταση της Γ_1, δηλαδή περιέχει όλα τα μη λογικά σύμβολα της Γ_1. Αν $\mathcal{A}'$ δομή για τη Γ_1' και $\mathcal{A}' \lceil \Gamma_1$ είναι ο περιορισμός της $\mathcal{A}'$ στη γλώσσα Γ_1 (οι $\mathcal{A}', \mathcal{A}$ έχουν το ίδιο σύμπαν και τις ίδιες ερμηνείες για τα μη λογικά σύμβολα της Γ_1) και v' αποτίμηση στην $\mathcal{A}'$, τότε για κάθε τύπο φ της Γ_1:

$$\mathcal{A}' \models \varphi[v'] \ \text{ ανν } \ \mathcal{A}' \lceil \Gamma_1 \models \varphi[v'].$$

65. Έστω ότι $T, \Sigma \subseteq \Pi(\Gamma_1)$. Δείξτε ότι αν τα T, Σ δεν έχουν κοινό μοντέλο (δηλ. δεν υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ τέτοια που $\mathcal{A} \models T$ και $\mathcal{A} \models \Sigma$), τότε υπάρχει πρόταση φ τέτοια που $T \vdash_{\mathcal{A}_1} \varphi$ και $\Sigma \vdash_{\mathcal{A}_1} \neg\varphi$.

66. Θεωρούμε το σύνολο $T = Th\mathcal{N} \cup \{x_0 \not\approx \underline{n} : n \in \mathbf{N}\}$, όπου $Th\mathcal{N}$ είναι το σύνολο των προτάσεων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που αληθεύουν στην $\mathcal{N}$ και $\underline{n}$ είναι ο όρος $\mathbf{0}'^{\cdots\prime}$ (n φορές). Δείξτε ότι το T είναι ικανοποιήσιμο.
<u>Σημείωση.</u> Οι δομές στις οποίες ικανοποιείται το T καλούνται "non-standard μοντέλα της αριθμητικής".

67. Ορισμός: Έστω $T \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ και K κλάση δομών για την Γ_1.

   α) Με $ModT$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των μοντέλων του T.

   β) Με ThK συμβολίζουμε το σύνολο

   $$\{\varphi \in \Pi(\Gamma_1) : \mathcal{A} \models \varphi \text{ για κάθε } \mathcal{A} \text{ του } K\}.$$

   Δείξτε ότι για τυχόντα $T, \Sigma \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ και τυχούσες κλάσεις δομών K, L ισχύουν:

   1) Αν $T \subseteq \Sigma$, τότε $Mod\Sigma \subseteq ModT$

   2) Αν $K \subseteq L$, τότε $ThL \subseteq ThK$

   3) $T \subseteq ThModT$ και $K \subseteq ModThK$

   4) $ModT = ModThModT$ και $ThK = ThModThK$.

68. Έστω τώρα σύνολα T, Σ τέτοια που $T \subseteq \Sigma \subseteq \Pi(\Gamma_1)$, T πλήρες και Σ ικανοποιήσιμο. Δείξτε ότι $T = \Sigma$.

69. Βρείτε τύπους σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμοι με τους

$$\forall x(P(x) \to x \approx y) \to (\exists z P(z) \to \exists u z \approx u),$$
$$\exists x x \approx y \to (P(x) \to \neg \exists z x \approx z).$$

70. Αποδείξτε το α) του θεωρήματος 3.6.1.

71. Έστω $\mathcal{A}$ δομή για τη Γ_1 και g 1-1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $|\mathcal{A}|$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική δομή $\mathcal{B}$ τέτοια που $g : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

72. Έστω $\mathcal{Z}$ η δομή για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που ορίζεται ως εξής:

   $\mathcal{Z} = \mathbf{Z}$,
   $\oplus^{\mathcal{Z}}$, $\odot^{\mathcal{Z}}$ οι συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολ/σμού στο $\mathbf{Z}$,
   $\prime^{\mathcal{Z}}$ η συνάρτηση με $\prime^{\mathcal{Z}}(n) = n + 1$ και $\mathbf{0}^{\mathcal{Z}} = 0$.

   α) Αληθεύει ότι $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$;

   β) Αληθεύει ότι $\mathcal{N} \equiv \mathcal{Z}$;

   γ) Αληθεύει ότι $\mathcal{N} \cong \mathcal{Z}$; Αν όχι, μήπως υπάρχει ισομορφισμός της $\mathcal{N}$ εντός της $\mathcal{Z}$;

73. Έστω $\mathcal{N}_\pi$ η δομή για την $\Gamma_1^{\pi\pi}$ που ορίζεται ως εξής:

$$|\mathcal{N}_\pi| = \mathbf{N},\ \oplus^{\mathcal{N}},\ \odot^{\mathcal{N}} \text{ οι συνήθεις πράξεις πρόσθεσης}$$
$$\text{και πολ/σμού στο } \mathbf{N}.$$

Δείξτε ότι οι ακόλουθες σχέσεις είναι ορίσιμες στην $\mathcal{N}_\pi$:

$$\{1\},\ \{< m, n >: n = m'\},\ \{< m, n >: m < n\}.$$

Κεφάλαιο 4

Το θεώρημα μη-πληρότητας του Gödel

4.1 Εισαγωγή

Έστω A σύνολο μη λογικών αξιωμάτων σε μια τυπική πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 (ή, όπως είδαμε, ισοδύναμα, σύνολο υποθέσεων στα πλαίσια του αξιωματικού συστήματος με μόνο λογικά αξιώματα). Δυο βασικά ερωτήματα που μας απασχολούν είναι τα εξής:

Ερώτημα 1 *Είναι το A πλήρες;*

Ερώτημα 2 *Είναι το A συνεπές;*

Είναι σαφές τι αφορά το δεύτερο ερώτημα. Σε σχέση με το πρώτο, πρέπει να ορίσουμε την έννοια "πλήρες σύνολο αξιωμάτων". Κατ' αρχήν, το πρώτο ερώτημα έχει νόημα μόνον αν υποθέσουμε ότι το A είναι συνεπές (αφού από κάθε αντιφατικό σύνολο υποθέσεων αποδεικνύονται τυπικά όλες οι προτάσεις). Η έννοια της πληρότητας ορίζεται με δυο ισοδύναμους τρόπους, δηλαδή συντακτικά και σημασιολογικά.

α) Λέμε ότι το A είναι 'πλήρες ως προς το $\mathcal{A}$', όπου $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του A, ανν για κάθε πρόταση φ της Γ_1, ισχύει ότι αν $\mathcal{A} \models \varphi$, τότε $A \vdash \varphi$. Συνήθως το ερώτημα αν το A είναι πλήρες ως προς το $\mathcal{A}$ έχει ενδιαφέρον όταν το μοντέλο είναι το "προτιθέμενο" (intended) ή σύνηθες (standard) μοντέλο του A.

β) Λέμε ότι το A είναι 'τυπικά πλήρες' ανν για κάθε πρόταση φ της Γ_1 ισχύει $A \vdash \varphi$ ή $A \vdash \neg\varphi$.

Ας δούμε γιατί η έννοια που ορίζεται στο α) ισοδυναμεί με αυτή που ορίζεται στο β). Έστω λοιπόν ότι το A είναι πλήρες ως προς το $\mathcal{A} \models A$ και φ είναι τυχούσα πρόταση της Γ_1. Τότε ισχύει ότι $\mathcal{A} \models \varphi$ ή $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ και συνεπώς ότι $A \vdash \varphi$ ή $A \vdash \neg\varphi$. Άρα, το A είναι τυπικά πλήρες. Αντίστροφα, έστω ότι το A είναι τυπικά πλήρες, $\mathcal{A} \models A$ και φ είναι τυχούσα πρόταση της Γ_1 τέτοια που $\mathcal{A} \models \varphi$. Τότε ισχύει ότι $A \vdash \varphi$ ή $A \vdash \neg\varphi$. Αν όμως ίσχυε ότι $A \vdash \neg\varphi$, θα ίσχυε και $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ (αφού το $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του A), πράγμα άτοπο. Άρα ισχύει $A \vdash \varphi$, δηλαδή το ζητούμενο.

Τα ανωτέρω ερωτήματα για το σύνολο αξιωμάτων P (που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) απασχόλησαν έντονα τους μαθηματικούς στην αρχή του αιώνα μας, στα πλαίσια του λεγόμενου "προγράμματος του Hilbert", το οποίο ήλθε ως απάντηση στην κρίση που προκάλεσαν στα Μαθηματικά οι ανακαλύψεις παραδόξων στη Θεωρία Συνόλων. Το P αντιστοιχεί στα αξιώματα που προτάθηκαν από τους Dedekind-Peano στο τέλος του 19ου αιώνα. Τα αρχικά αξιώματα εκφράστηκαν χωρίς χρήση τυπικής γλώσσας, όπως συνήθως στα Μαθηματικά και συνοδεύονταν από κάποιο συνολοθεωρητικό υπόβαθρο. Σύντομα όμως έγινε σαφές ότι η τακτοποίηση των θεμελίων των Μαθηματικών απαιτούσε χρήση τυπικών γλωσσών και μεθόδων κι έτσι οδηγηθήκαμε στα αντίστοιχα των αξιωμάτων αυτών στην πρωτοβάθμια γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$. Ειδικότερα, τα ακόλουθα ερωτήματα απασχόλησαν τους μαθηματικούς τη δεκαετία του 1920:

Πρόβλημα 1 Αν το P είναι συνεπές, είναι το P τυπικά πλήρες;

Πρόβλημα 2 Αποδεικνύεται (με στοιχειώδεις μεθόδους) ότι το P είναι συνεπές;

Ο K. Gödel απέδειξε το 1931 ότι το Πρόβλημα 2 και ένα πρόβλημα κάπως ασθενέστερο από το Πρόβλημα 1 έχουν αρνητική λύση. Πρώτα απέδειξε το "πρώτο θεώρημα μη-πληρότητας":
Υποθέτοντας ότι το P είναι ω-συνεπές, υπάρχει πρόταση φ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που

$$P \not\vdash \varphi \text{ και } P \not\vdash \neg\varphi \quad (*).$$

Στη συνέχεια απέδειξε το "δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας", δηλαδή ότι η συνέπεια του P δεν αποδεικνύεται με μεθόδους που είναι διαθέσιμες στα πλαίσιά του:
Υπάρχει μια πρόταση θ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που εκφράζει "Το P είναι συνεπές" και για την οποία ισχύει $P \not\vdash \theta$ (υποθέτοντας ότι το P είναι συνεπές).
Σημειώνουμε ότι ο J. B. Rosser βελτίωσε το 1936 το πρώτο θεώρημα του Gödel, δείχνοντας ότι η ασθενέστερη υπόθεση "το P είναι συνεπές" μπορεί να αντικαταστήσει την "το P είναι ω-συνεπές" και, κατά συνέπεια, ότι το Πρόβλημα 1 έχει αρνητική λύση.

Λεπτομερείς αποδείξεις θα δούμε στη συνέχεια, θα αναφερθούμε όμως τώρα στις βασικές ιδέες των αποδείξεων των θεωρημάτων μη-πληρότητας. Η πρόταση φ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ για την οποία ισχύει το πρώτο θεώρημα εκφράζει "Εγώ δεν αποδεικνύομαι στο P", προήλθε δηλαδή μέσω κωδικοποίησης στη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ κάποιας αυτοαναφορικής πρότασης της ελληνικής γλώσσας. Η ιδέα της κωδικοποίησης ή αριθμητικοποίησης είναι μια από τις βασικές ιδέες που είχε ο Gödel για την απόδειξη των θεωρημάτων μη-πληρότητας. Σημειώνουμε ότι υπάρχει πρόταση με μαθηματικό περιεχόμενο για την οποία ισχύει η (*) - η πρόταση αυτή εκφράζει μια παραλλαγή ενός θεωρήματος του F. Ramsey και ανακαλύφθηκε από τους J. Paris και L. Harrington το 1977. Η πρόταση θ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ για την οποία ισχύει το δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας παρήχθη και αυτή μέσω κωδικοποίησης. Η βασική ιδέα πίσω από την απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος μη-πληρότητας είναι ότι η απόδειξη του πρώτου θεωρήματος μη-πληρότητας μπορεί να "τυποποιηθεί", δηλαδή να δοθεί "μέσα στο P".

Σε σχέση με το πρώτο θεώρημα μη-πληρότητας πρέπει να αναφέρουμε τα εξής:

α) Ο Gödel δεν ασχολήθηκε ακριβώς με το P, αλλά με ένα παραπλήσιο σύνολο αξιωμάτων στα πλαίσια του συστήματος στο *Principia Mathematica* των Whitehead και Russell.

β) Η πρόταση φ για την οποία ισχύει η (*) είναι τέτοια που $\mathcal{N} \models \varphi$.

γ) Το P είναι 'ουσιαστικά μη-πλήρες', δηλαδή κάθε συνεπής επέκτασή του είναι τυπικά μη-πλήρης:
αν φ είναι πρόταση για την οποία ισχύει η (*), τότε υπάρχει μια πρόταση φ' τέτοια που $P + \varphi \nvdash \varphi'$ και $P + \varphi \nvdash \neg\varphi'$ (**),
αν φ, φ' είναι προτάσεις για τις οποίες ισχύουν οι (*), (**), τότε υπάρχει πρόταση φ'' τέτοια που $P + \varphi + \varphi' \nvdash \varphi''$ και $P + \varphi + \varphi' \nvdash \neg\varphi''$ κ.ο.κ.

Τελειώνουμε σημειώνοντας ότι το δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας ισχύει όχι μόνο για το P, αλλά για κάθε αξιωματικό σύστημα που περιέχει ένα μίνιμουμ αριθμητικής (ώστε να υπάρχει η δυνατότητα κωδικοποίησης), παραδείγματος χάρη για το αξιωματικό σύστημα Zermelo-Fraenkel για τη Θεωρία Συνόλων.

4.2 Βασικές συνέπειες του P

Ένα χαρακτηριστικό που θα θέλαμε να έχει το P είναι ν' αποδεικνύονται τυπικά από αυτό όλες οι βασικές ιδιότητες που έχουν οι φυσικοί αριθμοί, παραδείγματος χάριν η αντιμεταθετικότητα και η προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Το P πράγματι έχει αυτό το χαρακτηριστικό, όπως θα δούμε στις προτάσεις που ακολουθούν.

Πρόταση 4.2.1 *Οι ακόλουθες προτάσεις αποδεικνύονται τυπικά από το P:*
1) $\forall x(x \approx \mathbf{0} \oplus x)$
2) $\forall x \forall y(x' \oplus y \approx (x \oplus y)')$
3) $\forall x \forall y(x \oplus y \approx y \oplus x)$
4) $\forall x \forall y \forall z((x \oplus y) \oplus z \approx x \oplus (y \oplus z))$
5) $\forall x(0 \odot x \approx \mathbf{0})$
6) $\forall x \forall y(x' \odot y \approx x \odot y \oplus y)$
7) $\forall x \forall y(x \odot y \approx y \odot x)$
8) $\forall x \forall y \forall z((x \odot y) \odot z \approx x \odot (y \odot z))$
9) $\forall x \forall y \forall z(x \odot (y \oplus z) \approx x \odot y \oplus x \odot z)$
10) $\forall x \forall y \forall z((y \oplus z) \odot x \approx y \odot x \oplus z \odot x)$
11) $\forall x \forall y \forall z(x \oplus z \approx y \oplus z \to x \approx y)$
12) $\forall x \forall y \forall z(z \not\approx \mathbf{0} \to (x \odot z \approx y \odot z \to x \approx y))$.

Απόδειξη. Θα κάνουμε αναλυτική απόδειξη μόνο για το 3) - τα υπόλοιπα αποδεικνύονται με όμοιο τρόπο.
Λόγω του θεωρήματος γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$P \vdash \forall y(x \oplus y \approx y \oplus x).$$

Λόγω του αξιωματικού σχήματος $P7$ και του γεγονότος ότι για τυχόντες τύπους φ, ψ ισχύει $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \land \psi)$, αρκεί να δείξουμε ότι

α) $P \vdash x \oplus \mathbf{0} \approx \mathbf{0} \oplus x$ και
β) $P \vdash \forall y(x \oplus y \approx y \oplus x \to x \oplus y' \approx y' \oplus x)$.

Για το α) έχουμε την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$\forall x(x \oplus \mathbf{0} \approx x)$	$P3$
2.	$\forall x(x \oplus \mathbf{0} \approx x) \to x \oplus \mathbf{0} \approx x$	ΑΣ2
3.	$x \oplus \mathbf{0} \approx x$	1, 2, MP
4.	$\forall x(x \approx \mathbf{0} \oplus x)$	μέρος 1)
5.	$\forall x(x \approx \mathbf{0} \oplus x) \to x \approx \mathbf{0} \oplus x$	ΑΣ2
6.	$x \approx \mathbf{0} \oplus x$	4, 5, MP
7.	$\forall x \forall y \forall z(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z)$	τυπικό θεώρημα
8.	$\forall x \forall y \forall z(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z) \to$ $(x \oplus \mathbf{0} \approx x \land x \approx \mathbf{0} \oplus x \to x \oplus \mathbf{0} \approx \mathbf{0} \oplus x)$	ΑΣ2
9.	$x \oplus \mathbf{0} \approx \mathbf{0} \oplus x$	7, 8, MP

Για το β), λόγω των θεωρημάτων γενίκευσης και απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$P \cup \{x \oplus y \approx y \oplus x\} \vdash x \oplus y' \approx y' \oplus x,$$

πράγμα που ισχύει λόγω της ακόλουθης τυπικής απόδειξης:

1.	$x \oplus y \approx y \oplus x$	υπόθεση
2.	$\forall z \forall t(z \approx t \to z' \approx t')$	τυπ. θεώρ.
3.	$\forall z \forall t(z \approx t \to z' \approx t') \to [x \oplus y \approx y \oplus x \to$ $(x \oplus y)' \approx (y \oplus x)']$	ΑΣ2
4.	$x \oplus y \approx y \oplus x \to (x \oplus y)' \approx (y \oplus x)'$	2, 3, MP
5.	$(x \oplus y)' \approx (y \oplus x)'$	1, 4, MP
6.	$\forall z \forall t(z \oplus t' \approx (z \oplus t)')$	$P4$
7.	$\forall z \forall t(z \oplus t' \approx (z \oplus t')) \to x \oplus y' \approx (x \oplus y)'$	ΑΣ2
8.	$x \oplus y' \approx (x \oplus y)'$	6, 7, MP
9.	$\forall z \forall t(z' \oplus t \approx (z \oplus t)')$	μέρος 1)
10.	$\forall z \forall t(z' \oplus t \approx (z \oplus t)') \to y' + x \approx (y \oplus x)'$	ΑΣ2
11.	$y' \oplus x \approx (y \oplus x)'$	9, 10, MP
12.	$x + y' \approx y' \oplus x$	5, 8, 11, μεταβ/κότητα $\approx$.

Παρατήρηση. Στην προηγούμενη απόδειξη θα μπορούσαμε να είχαμε εργαστεί σημασιολογικά, δείχνοντας ότι για κάθε δομή $\mathcal{A}$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$, αν η v ικανοποιεί το P στην $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{A} \models x \oplus \mathbf{0} \approx \mathbf{0} \oplus x[v]$ και $\mathcal{A} \models \forall y(x \oplus y \approx y \oplus x \to x \oplus y' \approx y' \oplus x)[v]$. Αυτός ο τρόπος εργασίας είναι ακριβώς μια "απόδειξη με επαγωγή στο y".

Μερικοί όροι της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ έχουν ξεχωριστή σημασία, αφού αντιπροσωπεύουν στην τυπική γλώσσα τους φυσικούς αριθμούς. Αυτοί οι ειδικοί όροι καλούνται 'ψηφία' και είναι οι όροι της μορφής $0''^{\cdots\prime}$, όπου το σύμβολο $\prime$ εμφανίζεται n φορές, για τυχόν $n \in \mathbf{N}$ (δες και Άσκηση 65). Μπορούμε να δείξουμε ότι όλες οι αναμενόμενες ιδιότητες των ψηφίων αποδεικνύονται τυπικά από το P, παραδείγματος χάρη ότι οι εξής προτάσεις είναι τυπικές συνέπειες του P:

1) $\forall x(x \oplus \underline{1} \approx x')$
2) $\forall x(x \odot \underline{1} \approx x)$
3) $\forall x \forall y(x \oplus y \approx \underline{1} \to (x \approx \mathbf{0} \wedge y \approx \underline{1}) \vee (x \approx \underline{1} \wedge y \approx \mathbf{0}))$
4) $\forall x \forall y(x \odot y \approx \underline{1} \to x \approx \underline{1} \vee y \approx \underline{1})$.

Πρόταση 4.2.2 *Για τυχόντες φυσικούς αριθμούς m, n:*
α) Αν $m \neq n$, τότε $P \vdash \underline{m} \neq \underline{n}$.
β) $P \vdash \underline{m} \oplus \underline{n} \approx \underline{m \oplus n}$.
γ) $P \vdash \underline{m} \odot \underline{n} \approx \underline{m \odot n}$.

Απόδειξη. α) Έστω ότι $m \neq n$, ας υποθέσουμε ότι $m < n$ (- η περίπτωση $n < m$ είναι όμοια). Η ακόλουθη τυπική απόδειξη οδηγεί στο συμπέρασμα που θέλουμε, όπου υποθέτουμε ότι $m \geq 2$:

1.	$\forall x(x' \not\approx \mathbf{0})$	$P1$
2.	$\forall x(x' \not\approx \mathbf{0}) \to (\underline{n-m-1})' \not\approx \mathbf{0}$	$A\Sigma 2$
3.	$(\underline{n-m-1})' \not\approx \mathbf{0}$	1, 2, MP
4.	$((\underline{n-m-1}'') \approx \mathbf{0}' \to (\underline{n-m-1}') \approx \mathbf{0})$ $\to ((\underline{n-m-1}') \not\approx \mathbf{0} \to (\underline{n-m-1}'') \not\approx \mathbf{0}')$	$A\Sigma 1$
5.	$\forall x \forall y(x' \approx y' \to x \approx y)$	$P2$
6.	$\forall x \forall y(x' \approx y' \to x \approx y) \to$ $((\underline{n-m-1}'') \approx \mathbf{0}' \to (\underline{n-m-1}') \approx \mathbf{0})$	$A\Sigma 2$
7.	$(\underline{n-m-1}'') \approx \mathbf{0}' \to (\underline{n-m-1}') \approx \mathbf{0})$	5, 6 MP
8.	$(\underline{n-m-1}') \not\approx \mathbf{0} \to (\underline{n-m-1}'') \not\approx \mathbf{0}')$	4, 7, MP
9.	$(\underline{n-m-1})'' \not\approx \mathbf{0}'$	3,8, MP
	....	
κ.	$(\underline{n-m-1})'^{\cdots\prime} \neq \mathbf{0}'^{\cdots\prime}$ (το $\prime$ $m+1$, m φορές, αντίστοιχα)	όπως ανωτέρω
$\kappa+1$.	$\underline{m} \neq \underline{n}$	κ, αντιμεταθετικότητα $\approx$.

β) Χρησιμοποιούμε τη συνήθη αρχή επαγωγής στο σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{n \in \mathbf{N} : \text{για κάθε } m \in \mathbf{N} \text{ ισχύει } P \vdash \underline{m} \oplus \underline{n} \approx \underline{m \oplus n}\}$$

και ελέγχουμε ότι ισχύουν τα

i) $0 \in A$
ii) για κάθε $n \in \mathbf{N}$, αν $n \in A$, τότε $n+1 \in A$.

i) Αφού ο όρος $\underline{0}$ είναι ο $\mathbf{0}$ και $m \oplus \mathbf{0} \approx m$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbf{N}$ ισχύει $P \vdash \underline{m} \oplus \mathbf{0} \approx \underline{m}$, πράγμα που έπεται από το $P3$.
ii) Έστω τώρα ότι $n \in A$, δηλαδή ότι για κάθε $m \in \mathbf{N} : P \vdash \underline{m} \oplus \underline{n} \approx \underline{m \oplus n}$. Θέλουμε να ελέγξουμε ότι για τυχόν $m \in \mathbf{N}$:

$$P \vdash \underline{m} \oplus \underline{n+1} \approx \underline{m+(n+1)}.$$

Για συντομία, δεν παραθέτουμε μια τυπική απόδειξη, αλλά δίνουμε την ιδέα κατασκευής της. Από την επαγωγική υπόθεση και την Πρόταση 4.2.1, έχουμε ότι $P \vdash (\underline{m}\oplus\underline{n})' \approx (\underline{m+n})'$. Άρα, λόγω του $P4$, ισχύει $P \vdash \underline{m}\oplus(\underline{n})' \approx (\underline{m+n})'$. Όμως, εξ ορισμού των ψηφίων, ο όρος $(\underline{m+n})'$ είναι ο $\underline{m+n+1}$. Συνεπώς ισχύει $P \vdash \underline{m} \oplus \underline{n+1} \approx \underline{m+(n+1)}$, δηλαδή το ζητούμενο.
γ) Όμοια με το β).

Παρατηρήσεις. α) Για να κρατήσουμε σαφή το διαχωρισμό μεταξύ της τυπικής γλώσσας και της μεταγλώσσας, θα μιλάμε για "επαγωγή στη μεταγλώσσα" όταν χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής για το $\mathbf{N}$ όπως στην

προηγούμενη απόδειξη, σε αντιδιαστολή με την επαγωγή στα πλαίσια της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$, όταν χρησιμοποιούμε το αξιωματικό σχήμα $P7$ όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.1.
β) Στο εξής θα χρησιμοποιούμε την ανεπίσημη μέθοδο απόδειξης που χρησιμοποιήσαμε ανωτέρω.

Για ευνόητους λόγους, θέλουμε να εισαγάγουμε τα σύμβολα $<$, $\leq$ στην τυπική γλώσσα (-όπως έχουμε προαναφέρει, μερικοί συγγραφείς θεωρούν το $<$ ως αρχικό σύμβολο της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$, χωρίς αυτό να επηρεάζει ουσιαστικά τα πράγματα). Αυτό γίνεται μέσω του ακόλουθου ορισμού:

Ορισμός 4.2.1 *Θα γράφουμε* $x \prec y$ *αντί για* $\exists z(z \neq 0 \wedge x \oplus z \approx y)$ *και* $x \preceq y$ *αντί για* $x \prec y \vee x \approx y$. *Επίσης, όπως συνήθως, θα γράφουμε* $x \not\prec y$ *αντί για* $\neg x \prec y$.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των $\prec$, $\preceq$ αποδεικνύονται τυπικά από το P. Αναφέρουμε ενδεικτικά μερικές στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.3 *Οι ακόλουθες προτάσεις αποδεικνύονται τυπικά από το* P:

1) $\forall x(x \not\prec 0)$

2) $\forall x \forall y \forall z(x \prec y \rightarrow (y \prec z \rightarrow x \prec z))$

3) $\forall x \forall y \forall z(x \prec y \rightarrow x \oplus z < y \oplus z)$

4) $\forall x \forall y(x \prec y' \leftrightarrow x \preceq y)$

5) $\forall x(x \prec x')$

6) $\forall x \forall y(x \prec y \vee x \approx y \vee y \prec x)$

Το ότι η ακολουθία των ψηφίων αντιστοιχεί επακριβώς στην ακολουθία των φυσικών αριθμών εξασφαλίζεται από ιδιότητες της $\preceq$ και την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.4 *(1) Για κάθε φυσικό αριθμό :*

$$P \vdash x \approx \mathbf{0} \vee \ldots \vee x \approx \_ \leftrightarrow x \preceq \_.$$

(2) Για κάθε φυσικό αριθμό και κάθε τύπο $\varphi(x)$:

$$P \vdash \varphi(\mathbf{0}) \wedge \ldots \wedge \varphi(\_) \leftrightarrow \forall x(x \preceq \_ \rightarrow \varphi(x)).$$

Απόδειξη. (1) Με επαγωγή στη μεταγλώσσα. Κατ' αρχή θέλουμε να ελέγξουμε ότι $P \vdash x \approx \mathbf{0} \leftrightarrow x \preceq \underline{0}$. Αυτό όμως έπεται από τους ορισμούς των $\underline{0}$, $\prec$ και το 1) της προηγούμενης Πρότασης.
Έστω τώρα ότι ισχύει $P \vdash x \approx \mathbf{0} \vee \ldots \vee x \approx \underline{\ \ } \leftrightarrow x \preceq \underline{\ \ }$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει $P \vdash x \approx \mathbf{0} \vee \ldots \vee x \approx \underline{\ \ +1} \leftrightarrow x \preceq \underline{\ \ +1}$. Λόγω των ορισμών των $\underline{\ \ +1}$, $\prec$ και του 4) της προηγούμενης Πρότασης, ισχύει ότι

$$P \vdash x \preceq \underline{\ \ +1} \leftrightarrow x \preceq \underline{\ \ } \vee x \approx \underline{\ \ +1}.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έπεται το ζητούμενο.
(2) Όμοια.

Παρατήρηση. Η προηγούμενη πρόταση ισχύει, με κατάλληλη τροποποίηση, και για $\prec$ αντί για $\preceq$.

Στη Θεωρία Αριθμών, εκτός από την αρχή της επαγωγής, πολύ συχνά χρησιμοποιούμε την "αρχή της πλήρους επαγωγής" και την "αρχή του ελαχίστου αριθμού". Και οι δυο αυτές αρχές έχουν αντίστοιχα αξιωματικά σχήματα στη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που αποδεικνύονται από το P.

Θεώρημα 4.2.1 *(α) Για κάθε τύπο $\varphi(x_0, \ldots, \varphi_n)$ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$:*

$$P \quad \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \{\forall x_0 [\forall x_{n+1}(x_{n+1} \prec x_0 \to \varphi(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n)) \to \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)] \to \forall x_0 \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)\}.$$

(β) Για κάθε τύπο $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$:

$$P \quad \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [\exists x_0 \varphi(x_0, \ldots, x_n) \to \exists x_0 (\varphi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \forall x_{n+1}(x_{n+1} \prec x_0 \to \neg\varphi(x_{n+1}, \ldots, x_n)))].$$

Απόδειξη. Άσκηση 74.

Ένα άλλο σύμβολο που θέλουμε να υπάρχει διαθέσιμο είναι το σύμβολο της διαιρετότητας.

Ορισμός 4.2.2 *Για τυχόντες όρους t, s της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$, θα γράφουμε $t|s$ αντί για $\exists z(s \approx t \odot z)$, όπου z είναι μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στους t, s.*

Όλες οι συνήθεις ιδιότητες του $|$ αποδεικνύονται τυπικά από το P, παραδείγματος χάριν οι εξής:

1) $\forall x(x|x \wedge \underline{1}|x \wedge x|\mathbf{0})$
2) $\forall x \forall y \forall z(x|y \wedge y|z \to x|z)$
3) $\forall x \forall y(y \not\approx \mathbf{0} \wedge x|y \to x \preceq y)$
4) $\forall x \forall y(x|y \wedge y|x \to x \approx y)$
5) $\forall x \forall y \forall z(x|y \to x|y \odot z)$
6) $\forall x \forall y \forall z(x|y \wedge x|z \to x|y \oplus z)$.

Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι τυπική συνέπεια του P είναι η ύπαρξη μοναδικού πηλίκου και υπολοίπου για κάθε διαίρεση με αριθμό διαφορετικό από το 0.

Πρόταση 4.2.5 $P \vdash y \neq 0 \to \exists u \exists v[x \approx y \odot u \oplus v \wedge v \prec y \wedge$
$\forall z \forall w(x \approx y \odot z \oplus w \wedge w \prec y \to u \approx z \wedge v \approx w)]$.

Απόδειξη. Άσκηση 75.

Από τα προηγούμενα γίνεται σαφές ότι μπορούμε με αυτό τον τρόπο να αποδείξουμε τυπικά από το P κι άλλες προτάσεις που εκφράζουν θεωρήματα για τους φυσικούς. Βέβαια θα χρειαστεί να ορίσουμε με τύπους της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ συναρτήσεις όπως η x^y και η $x!$, αυτό όμως δεν είναι δύσκολο, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και θεωρήματα για τη διατύπωση ή την απόδειξη των οποίων χρησιμοποιούνται μη στοιχειώδεις έννοιες, όπως, παραδείγματος χάρη, η λογαριθμική συνάρτηση, είναι δυνατό να εκφραστούν στη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και ν' αποδειχθούν τυπικά από το P.

4.3 Εκφρασιμότητα σχέσεων και συναρτήσεων

Όπως έχουμε ήδη δει, ένα ενδιαφέρον θέμα είναι η ορισιμότητα σχέσεων σε μια δομή, μια και μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε μέσω τύπων κάποιες διαισθητικές ιδιότητες. Ένα παρόμοιο ζήτημα είναι η δυνατότητα έκφρασης μιας σχέσης στα πλαίσια ενός συνόλου αξιωμάτων, δηλαδή η δυνατότητα ορισμού μιας σχέσης, **με ομοιόμορφο τρόπο**, σε όλα τα μοντέλα ενός συνόλου αξιωμάτων (όπως είναι το P). Αυτό το θέμα θα συζητήσουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 4.3.1 *Έστω T σύνολο προτάσεων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και R n-μελής σχέση στο $\mathbf{N}$, δηλαδή $R \subseteq \mathbf{N}^n$, όπου $n \geq 1$. Λέμε ότι η R είναι 'εκφράσιμη στο T' ανν υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ τέτοιος που για κάθε $m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{N}$:*

α) αν $< m_1, \ldots, m_n > \in R$, τότε $T \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$

β) αν $< m_1, \ldots, m_n > \notin R$, τότε $T \vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$.

Προφανώς, αν η R είναι εκφράσιμη στο T, τότε είναι εκφράσιμη σε κάθε επέκταση Σ του T, δηλαδή σε κάθε σύνολο προτάσεων $\Sigma \supseteq T$.

Παράδειγμα. Η σχέση της ισότητας είναι εκφράσιμη στο P. Πράγματι, αν καλέσουμε $\varphi(x_1, x_2)$ τον τύπο $x_1 \approx x_2$, τότε για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$:

α) αν $m = n$, τότε $P \vdash \underline{m} \approx \underline{n}$ (λόγω ανακλαστικότητας της $\approx$)
β) αν $m \neq n$, τότε $P \vdash \underline{m} \not\approx \underline{n}$ (λόγω της Πρότασης 4.2.2).

Παρατήρηση. Αν μια σχέση $R \subseteq \mathbf{N}^n$ είναι εκφράσιμη στο T και $\mathcal{N} \models T$, τότε η R είναι ορίσιμη στο $\mathcal{N}$. Πράγματι, έστω $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ τύπος για τον οποίο ισχύουν τα α), β) ανωτέρω. Τότε προφανώς

$$< m_1, \ldots, m_n > \in R \Rightarrow T \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}) \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n).$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\mathcal{N} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \Rightarrow T \not\vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}) \Rightarrow < m_1, \ldots, m_n > \in R,$$

άρα $< m_1, \ldots, m_n > \in R \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n)$ (*),
δηλαδή η R ορίζεται από το φ στη δομή $\mathcal{N}$.
Το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν η R είναι ορίσιμη στο $\mathcal{N}$, τότε η R είναι εκφράσιμη στο T, δεν ισχύει. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι για κάποιο τύπο $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ισχύει η (*), τότε θα έχουμε

$$< m_1, ..., m_n > \in R \Rightarrow \mathcal{N} \not\models \neg\varphi(m_1, \ldots, m_n) \Rightarrow T \not\vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}).$$

Όμως από το γεγονός ότι $T \not\vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $T \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$, αφού η θεωρία T μπορεί να είναι μη-πλήρης, δηλαδή να ισχύει $T \not\vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$ και $T \not\vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$!
(Όμοια,

$$< m_1, \ldots, m_n > \notin R \Rightarrow \mathcal{N} \not\models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \Rightarrow T \not\vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}),$$

από την τελευταία όμως δεν προκύπτει ότι $T \vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$!)

Ανάλογος ορισμός δίνεται για συναρτήσεις στο $\mathbf{N}$.

Ορισμός 4.3.2 *Έστω T σύνολο προτάσεων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και f n-μελής συνάρτηση στο $\mathbf{N}$, δηλαδή $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, όπου $n \geq 1$. Λέμε ότι η f είναι 'αναπαραστάσιμη στο T' ανν το γράφημα της f είναι σχέση εκφράσιμη στο T, δηλαδή υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ τέτοιος που για κάθε $m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{N}$ ισχύουν τα:*

α) αν $f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$, τότε $T \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$

β) αν $f(m_1, \ldots, m_n) \neq m_{n+1}$, τότε $T \vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$.

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να οριστεί η αναπαραστασιμότητα μιας συνάρτησης στο P:

Πρόταση 4.3.1 *Έστω f n-θέσια συνάρτηση στο $\mathbf{N}$, $n \geq 1$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1) Η f είναι αναπαραστάσιμη στο P

2) Υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ τέτοιος που για κάθε $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbf{N}$ να ισχύουν
α) αν $f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$, τότε $P \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$
β) $P \vdash \exists! x_{n+1} \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+1})$.

3) Υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ τέτοιος που για κάθε $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbf{N}$ να ισχύουν
α) αν $f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$, τότε $P \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$
β) $P \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$.

Απόδειξη. 1) $\Rightarrow$ 2) Έστω ότι ισχύει το 1), δηλαδή υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ τέτοιος που για κάθε $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbf{N}$ να ισχύουν τα

$$\text{αν } f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}, \quad \text{τότε } P \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}}) \ \ (*)$$
$$\text{αν } f(m_1, \ldots, m_n) \neq m_{n+1}, \quad \text{τότε } P \vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}}) \ \ (+).$$

Θεωρούμε τον τύπο $\varphi^*(x_1, \ldots, x_{n+1})$ που εκφράζει "το x_{n+1} είναι ο ελάχιστος αριθμός τέτοιος που $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$", δηλαδή τον τύπο

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \wedge \forall x_{n+2}(x_{n+2} < x_{n+1} \rightarrow \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+2})).$$

Θα δείξουμε ότι ισχύουν τα α), β) του 2) για το φ^*.
Έστω $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbf{N}$ τέτοια που $f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$. Λόγω της (*), για το α) του 2) μένει να δείξουμε ότι

$$P \vdash \forall x_{n+2}(x_{n+2} < \underline{m_{n+1}} \rightarrow \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+2})).$$

Έστω λοιπόν $\mathcal{A} \models P$ και $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο που $\mathcal{A} \models a < \underline{m_{n+1}}$. Τότε, λόγω της Πρότασης 4.2.4, υπάρχει φυσικός αριθμός $\quad < m_{n+1}$ τέτοιος που $\mathcal{A} \models a = \underline{\ }$. Όμως τότε θα ισχύει $f(m_1, \ldots, m_n) \neq \quad$, άρα, λόγω της (+), έχουμε ότι $P \vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, \underline{\ })$. Συνεπώς $\mathcal{A} \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, a)$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.
Ας έρθουμε τώρα στο β) του 2). Λόγω του α), ισχύει προφανώς ότι

$$P \vdash \exists x_{n+1} \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+1}).$$

Άρα, λόγω του Θεωρήματος 4.2.1, θα ισχύει και ότι

$$P \vdash \exists x_{n+1} \varphi^*(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+1}).$$

Όμως το ελάχιστο στοιχείο είναι μοναδικό (όταν υπάρχει). Άρα

$$P \vdash \exists! x_{n+1} \varphi^*(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+1}).$$

2) $\Rightarrow$ 3) Έστω ότι υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ τέτοιος που για κάθε $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbf{N}$ ισχύουν τα:

$$\text{αν } f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}, \text{ τότε } P \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}}) \quad (*)$$
$$P \vdash \exists! x_{n+1} \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+1}) \quad (+).$$

Θεωρούμε τον τύπο $\varphi^*(x_1, \ldots, x_{n+1})$:

$$\begin{aligned}(\exists! x_{n+1} \varphi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}))\\ \vee (\neg\exists! x_{n+1} \varphi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} = 0).\end{aligned}$$

Τότε ισχύουν τα α), β) του 3) για τον $\varphi^*(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Πράγματι, το α) είναι άμεσο, λόγω των (*), (+) και του ότι αν $P \vdash \varphi$, τότε $P \vdash \varphi \vee \psi$, για τυχούσες προτάσεις φ, ψ. Το β) είναι επίσης προφανές, διότι

$$P \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n (\exists! x_{n+1} \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \vee \neg\exists! x_{n+1} \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})).$$

3) $\Rightarrow$ 1) Έστω ότι υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ τέτοιος που για κάθε $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbf{N}$ ισχύουν τα:

$$\text{αν } f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}, \text{ τότε } P \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}}) \quad (*)$$
$$P \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \quad (+).$$

Θα δείξουμε ότι ισχύουν τα α), β) του ορισμού αναπαραστασιμότητας. Το α) ισχύει προφανώς, λόγω της (*). Έστω τώρα ότι $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbf{N}$ τέτοια που $f(m_1, \ldots, m_n) \neq m_{n+1}$. Λόγω των (*) και (+), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}P \vdash \quad & \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, \underline{f(m_1, \ldots, m_n)}) \wedge\\ & \forall x_{n+1}(x_{n+1} \neq \underline{f(m_1, \ldots, m_n)} \to \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+1})).\end{aligned}$$

Λόγω της Πρότασης 4.2.2 α), ισχύει όμως ότι $P \vdash \underline{m_{n+1}} \neq \underline{f(m_1, \ldots, m_n)}$. Άρα έπεται ότι $P \vdash \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, \underline{m_{n+1}})$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Παρατήρηση. Στην πραγματικότητα, η ισοδυναμία των 2) και 3) ισχύει για κάθε σύνολο προτάσεων T της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα αναπαραστάσιμων συναρτήσεων.

Παραδείγματα. 1) Η συνάρτηση του επομένου $'\mathbf{N}$ είναι αναπαραστάσιμη, με την έννοια 3), σε κάθε $T \subseteq \Pi(\Gamma_1^{\theta\alpha})$. Πράγματι, έστω $\varphi(x_1, x_2)$ ο τύπος $x_2 = x_1'$. Τότε για κάθε $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$: αν $m_2 = m_1'^{\mathbf{N}}$, τότε $m_2 = m_1 + 1$, άρα $T \vdash \underline{m_2} = (\underline{m_1})'$. Επίσης, όπως είναι εύκολο να ελέγξουμε, $T \vdash \exists! x_2 x_2 = x_1'$, άρα ισχύει το ζητούμενο.

2) Έστω $P_j^n : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, $n \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, η *συνάρτηση προβολής στην*

j συντεταγμένη, δηλαδή η συνάρτηση που ορίζεται ως $P_j^n(x_1,\ldots,x_n) = x_j$. Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη με την έννοια 3) σε κάθε $T \subseteq \Pi(\Gamma_1^{\theta\alpha})$.
Πράγματι, είναι εύκολο να δείξουμε ότι ισχύουν τα α), β) για τον τύπο

$$\varphi_{nj}(x_1,\ldots,x_{n+1}):\ \ x_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = x_n \wedge x_{n+1} = x_j.$$

3) Έστω ότι έχουμε τις συναρτήσεις $g : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ και $h_1,\ldots,h_k : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, όπου $m, n \geq 1$, και ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ με *αντικατάσταση των $h_1,\ldots,h_k$ στη g*, δηλαδή ως εξής:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_k(x_1,\ldots,x_n)).$$

Θα δείξουμε ότι αν οι $g, h_1,\ldots,h_k$ είναι αναπαραστάσιμες στο $T \subseteq \Pi(\Gamma_1^{\theta\alpha})$, τότε και η f είναι αναπαραστάσιμη στο T, με χρήση του ορισμού 3) της αναπαραστασιμότητας. Έστω λοιπόν ότι οι τύποι $\varphi_g(x_1,\ldots,x_{k+1})$, $\varphi_{h_1}(x_1,\ldots,x_{n+1})$, $\ldots\varphi_{h_k}(x_1,\ldots,x_{n+1})$ αναπαριστούν τις $g, h_1,\ldots,h_k$, αντίστοιχα, στο T. Ας καλέσουμε $\varphi_f(x_1,\ldots,x_{n+1})$ τον τύπο

$$\exists y_1\ldots\exists y_k[\varphi_g(y_1,\ldots,y_k,x_{n+1}) \wedge \varphi_{h_1}(x_1,\ldots,x_n,y_1) \wedge \ldots \wedge \\ \varphi_{h_k}(x_1,\ldots,x_n,y_k)].$$

Θα ελέγξουμε ότι ισχύουν τα α), β) της Πρότασης 4.3.1, 3), για τον τύπο φ_f.
α) Έστω ότι $m_1,\ldots m_{n+1} \in \mathbf{N}$ τέτοια που $f(m_1,\ldots,m_n) = m_{n+1}$. Έστω $l_1,\ldots,l_k \in \mathbf{N}$ τέτοια που $h_1(m_1,\ldots,m_n) = l_1,\ldots,h_k(m_1,\ldots,m_n) = l_k$, οπότε $g(l_1,\ldots,l_k) = m_{n+1}$. Λόγω της υπόθεσης για τους τύπους $\varphi_g, \varphi_{h_1},\ldots,\varphi_{h_k}$, ισχύουν τα εξής:

$$T \vdash \varphi_{h_1}(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_n},\underline{l_1})$$

....

$$T \vdash \varphi_{h_k}(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_n},\underline{l_k})$$
$$T \vdash \varphi_g(\underline{l_1},\ldots,\underline{l_k},\underline{m_{n+1}}).$$

Συνεπώς

$$T \vdash \varphi_{h_1}(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_n},\underline{l_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi_{h_k}(\underline{m_1},\ldots\underline{m_n},\underline{l_k}) \wedge \varphi_g(\underline{l_1},\ldots,\underline{l_k},\underline{m_{n+1}}),$$

από όπου έπεται προφανώς ότι $T \vdash \varphi_f(\underline{m_1},\ldots,\underline{m_n},\underline{m_{n+1}})$.
β) Για ευκολία, δουλεύουμε σημασιολογικά. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν $\mathcal{A} \models T$ και τυχόντα $a_1,\ldots,a_n \in |\mathcal{A}|$ και δείχνουμε ότι $\mathcal{A} \models \exists! x_{n+1}\varphi_f(a_1,\ldots,a_n,x_{n+1})$. Λόγω της υπόθεσης για τους τύπους $\varphi_g, \varphi_{h_1},\ldots,\varphi_{h_k}$, υπάρχουν $b_1,\ldots,b_k \in |\mathcal{A}|$ τέτοια που για κάθε $1 \leq i \leq$:

$$\mathcal{A} \models \varphi_{h_i}(a_1, \ldots, a_n, b_i) \wedge \forall x_{n+1}(\varphi_{h_i}(a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}) \to x_{n+1} = b_i) \quad (*)$$

και υπάρχει $c \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο που

$$\mathcal{A} \models \varphi_g(b_1, \ldots, b_k, c) \wedge \forall x_{k+1}(\varphi_g(b_1, \ldots, b_k, x_{k+1}) \to x_{k+1} = c) \quad (+).$$

Από τις (*) και (+) έπεται αμέσως ότι $\mathcal{A} \models \varphi_f(a_1, \ldots, a_n, c)$ (1).
Έστω τώρα $d \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο που $\mathcal{A} \models \varphi_f(a_1, \ldots, a_n, d)$. Τότε, από τον ορισμό του φ_f, υπάρχουν $e_1, \ldots, e_k$ τέτοια που

$$\mathcal{A} \models \varphi_{h_1}(a_1, \ldots, a_n, e_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_{h_k}(a_1, \ldots, a_n, e_k) \wedge \varphi_g(e_1, \ldots, e_k, d).$$

Λόγω των (*), έπεται ότι $b_1 = e_1, \ldots, b_k = e_k$, οπότε, λόγω της (+), έπεται ότι $c = d$. Άρα ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x_{n+1}(\varphi_f(a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}) \to x_{n+1} = c) \quad (2).$$

Από τις (1), (2) έπεται το ζητούμενο.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις που είναι αναπαραστάσιμες στο P είναι ακριβώς οι 'αναδρομικές συναρτήσεις'. Οι συναρτήσεις αυτές, που παίζουν σπουδαίο ρόλο γενικά στη Μαθηματική Λογική, παράγονται από κάποιες αρχικές συναρτήσεις μέσω κανόνων, με διαδικασία παρόμοια με εκείνη παραγωγής τυπικών θεωρημάτων από κάποια αξιώματα μέσω αποδεικτικών κανόνων.

Ορισμός 4.3.3 *1) Καλούμε 'βασικές' ή 'αρχικές αναδρομικές συναρτήσεις' τις*

$$\begin{array}{l} Z : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \text{ με } Z(x) = 0 \\ S : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \text{ με } S(x) = x + 1 \\ P^n_j : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}, \text{ για κάθε } n \geq 1 \text{ και } 1 \leq j \leq n. \end{array}$$

2) Καλούμε 'αναδρομικούς κανόνες' τους εξής κανόνες, με βάση τους οποίους ορίζουμε νέες συναρτήσεις από ήδη υπάρχουσες:

α) αντικατάσταση (δες προηγούμενο παράδειγμα)

β) αναδρομή: αν έχουμε τις συναρτήσεις $g : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, $h : \mathbf{N}^{n+2} \to \mathbf{N}$, $n \geq 1$, τότε η *γ) μ-τελεστής: αν έχουμε μια συνάρτηση $g : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$, $n \geq 1$, για την οποία ισχύει ότι για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $y \in \mathbf{N}$ τέτοιο που $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, τότε η $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ ορίζεται "με μ-τελεστή από τη g" ανν*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{ελάχιστο } y \text{ τέτοιο που } g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0,$$

πράγμα που συνήθως γράφουμε ως

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0).$$

3) Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, $n \geq 1$, είναι 'πρωτογενής αναδρομική' ανν η f παράγεται από τις αρχικές αναδρομικές συναρτήσεις με πεπερασμένο πλήθος εφαρμογών των πρώτων δυο κανόνων, δηλαδή ανν υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_n$ τέτοια που $f_n = f$ και, για κάθε $1 \leq i \leq n$, η f_i είναι αρχική αναδρομική ή ορίζεται από προηγούμενες με αντικατάσταση ή αναδρομή.
4) Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ είναι 'αναδρομική' ανν παράγεται από τις αρχικές αναδρομικές συναρτήσεις με πεπερασμένο πλήθος εφαρμογών των αναδρομικών κανόνων.

Όπως προαναφέραμε, θα δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη στο P ανν είναι αναδρομική (-υποθέτοντας ότι το P είναι συνεπές). Η απόδειξη αυτή θα στηριχθεί σε δυο βασικές ιδέες του Gödel: τη χρήση της β-συνάρτησης και την 'αριθμητικοποίηση του συντακτικού'. Ο πρώτος στόχος μας είναι να δείξουμε ότι κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη στο P. Για να τον πετύχουμε θα χρειαστεί να κάνουμε αρκετή προκαταρκτική δουλειά.

Πρόταση 4.3.2 *Έστω ότι η $g : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$, $\ \geq 1$, είναι (πρωτογενής) αναδρομική συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, $n \geq 1$, που ορίζεται ως*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(y_1, \ldots, y_k),$$

όπου η y_i, $1 \leq i \leq \ $, είναι κάποια από τις $x_1, \ldots, x_n$ είναι επίσης (πρωτογενής) αναδρομική.

Απόδειξη. Έστω ότι $y_1 = x_{i_1}, \ldots, y_k = x_{i_k}$. Τότε προφανώς

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(P^n_{i_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, P^n_{i_k}(x_1, \ldots, x_n)),$$

οπότε το ζητούμενο έπεται λόγω της υπόθεσης και του ορισμού 4.3.3.

Συνέπεια της Πρότασης 4.3.2 είναι ότι αν σε μια (πρωταρχική) αναδρομική συνάρτηση προσθέσουμε πλαστές μεταβλητές ή ταυτίσουμε μεταβλητές ή αντιμεταθέσουμε μεταβλητές, τότε η συνάρτηση που προκύπτει είναι επίσης (πρωτογενής) αναδρομική. Παραδείγματος χάρη, αν η $g : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ είναι (πρωτογενής) αναδρομική, τότε και οι συναρτήσεις $f : \mathbf{N}^3 \to \mathbf{N}$ με $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_3)$ και $h : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ με $h(x_1, x_2) = g(x_2, x_1)$ είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές.

Πολλές συνήθεις συναρτήσεις στους φυσικούς είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές. Αναφέρουμε ενδεικτικά μερικές, εξηγώντας τηλεγραφικά γιατί είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές.

Παραδείγματα. α) Η $+^{\mathbf{N}}$ είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού ορίζεται αναδρομικά από τις P_1^1 και S:

$$\begin{aligned} &x + 0 = P_1^1(x) \\ &x + (y+1) = S(x+y). \end{aligned}$$

β) Η $.^{\mathbf{N}}$ είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού ορίζεται αναδρομικά από τις Z και $+^{\mathbf{N}}$:

$$\begin{aligned} &x.0 = Z(x) \\ &x.(y+1) = +^{\mathbf{N}}(x.y, x). \end{aligned}$$

γ) Η $P : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ είναι πρωτογενής αναδρομική, όπου

$$P(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

αφού ορίζεται αναδρομικά από το φυσικό 0 και την P_1^2:

$$\begin{aligned} &P(0) = 0 \\ &P(y+1) = P_1^2(y, P(y)). \end{aligned}$$

δ) Η $\dot{-} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ είναι πρωτογενής αναδρομική, όπου

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, & \text{αν } x \geq y \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

αφού ορίζεται από τις P_1^1 και P ως εξής:

$$\begin{aligned} &x \dot{-} 0 = P_1^1(x) \\ &x \dot{-} (y+1) = P(x \dot{-} y). \end{aligned}$$

ε) Η $\Theta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ είναι πρωτογενής αναδρομική, όπου

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

αφού ορίζεται από τη Z και τη σταθερή συνάρτηση 1 ως εξής:

$$\begin{aligned} &\Theta(0) = 0 \\ &\Theta(y+1) = 1. \end{aligned}$$

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται σε μια διαδικασία που μας οδηγεί από (πρωτογενείς) αναδρομικές σε (πρωτογενείς) αναδρομικές συναρτήσεις.

Πρόταση 4.3.3 *Έστω $f : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$, $n \geq 1$, (πρωτογενής) αναδρομική συνάρτηση. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\sum_{<} f : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$, $\prod_{<} f : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ ως εξής:*

$$\textstyle\sum_{<} f(x_1, \ldots, x_n, z) = \begin{cases} 0, & \text{αν } z = 0 \\ f(\vec{x}, 0) + \cdots + f(\vec{x}, z-1), & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

$$\textstyle\prod_{<} f(x_1, \ldots, x_n, z) = \begin{cases} 0, & \text{αν } z = 0 \\ f(\vec{x}, 0) \cdot \ldots \cdot f(\vec{x}, z-1), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τότε οι $\sum_{<} f$, $\prod_{<} f$ είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές.

Απόδειξη. Για την $g = \sum_{<} f$ παρατηρούμε ότι ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{aligned} &g(x_1, \ldots, x_n, 0) = 0 \\ &g(x_1, \ldots, x_n, y+1) = g(x_1, \ldots, x_n, y) + f(x_1, \ldots, x_n, y). \end{aligned}$$

Όμοια δουλεύουμε για την $\prod_{<} f$.

Παρατήρηση. Η προηγούμενη πρόταση ισχύει και όταν έχουμε $\leq$ αντί για $<$.

Ως παράδειγμα εφαρμογής της Πρότασης 4.3.3 αναφέρουμε το εξής:
Η συνάρτηση $\delta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{αριθμός διαιρετών του } x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι πρωτογενής αναδρομική, διότι ισχύει η

$$\delta(x) = \textstyle\sum_{\leq} \overline{\Theta}(rm(x, y)),$$

όπου $\overline{\Theta} = 1\dot{-}\Theta$ και $rm(x, y)$ είναι η συνάρτηση με τιμή το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με τον y - οι συναρτήσεις $\overline{\Theta}$ και rm είναι πρωτογενείς αναδρομικές (δες Άσκηση 80).

Μερικές φορές ορίζουμε μια συνάρτηση με 'αναδρομή στο πεδίο τιμών', δηλαδή συμβουλευόμαστε όλες τις προηγούμενες τιμές της για να καθορίσουμε μια τιμή. Αυτή η διαδικασία διατηρεί την (πρωτογενή) αναδρομικότητα. Θα αποδείξουμε αυτό το γεγονός αργότερα.

Η ακόλουθη πρόταση αφορά τη β-συνάρτηση του Gödel.

Πρόταση 4.3.4 *Έστω $\beta : \mathbf{N}^3 \to \mathbf{N}$ η πρωταρχική αναδρομική συνάρτηση που ορίζεται ως $\beta(x_1, x_2, x_3) = rm(x_1, x_2(x_3 + 1) + 1)$. Η β είναι αναπαραστάσιμη στο P από τον τύπο $\varphi_\beta(x_1, x_2, x_3, x_4)$:*

$$\exists z[x_1 = (x_2 \cdot (x_3 + \underline{1}) + \underline{1}).z + x_4 \wedge x_4 < x_2 \cdot (x_3 + \underline{1}) + \underline{1}].$$

Απόδειξη. Άσκηση.

Θα χρειαστούμε τις εξής προτάσεις από τη Θεωρία Αριθμών:

Θεώρημα 4.3.1 (Θεώρημα υπολοίπων κινέζου) *Για τυχόντες φυσικούς αριθμούς $x_0, \ldots, x_k$, $y_0, \ldots, y_k$, αν οι $x_0, \ldots, x_k$ είναι πρώτοι ανά δυο, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $z < x_0 \cdots x_k$ τέτοιος που*

$$z = y_0 mod x_0, \ldots, z = y_k mod x_k.$$

Θεώρημα 4.3.2 *Για τυχόντες φυσικούς αριθμούς $a_0, \ldots, a_k$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί b, c τέτοιοι που $\beta(b, c, i) = a_i$ για $0 \leq i \leq$.*

Απόδειξη. Έστω $a_0, \ldots, a_k \in \mathbf{N}$. Θέτουμε $c = n!$, όπου $n = max(\ , a_0, \ldots, a_k)$. Θα δείξουμε ότι οι αριθμοί $x_0 = c(0+1)+1$, ..., $x_k = c(\ +1)+1$ είναι πρώτοι ανά δύο. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τους x_j, x_i για κάποια $0 \leq i < j \leq$. Υποθέτουμε ότι οι x_i, x_j έχουν ένα κοινό διαιρέτη > 1, ας πούμε τον πρώτο αριθμό p. Τότε $p|c(j - i)$, άρα $p|c$ ή $p|j - i$. Αν ισχύει $p|c$, τότε $p|c(i + 1)$, άτοπο, διότι $p|c(i + 1) + 1$. Αν $p|j - i$, τότε $p|c$, διότι $j - i \leq$ και $!|c$, πάλι άτοπο. Άρα οι x_i, x_j είναι πρώτοι ανά δυο για οποιουσδήποτε δείκτες $0 \leq i, j \leq$. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα υπολοίπων του κινέζου, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $b \in \mathbf{N}$ τέτοιος που $\beta(b, c, i) = a_i$ για κάθε $0 \leq i \leq$.

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει τη δυνατότητα να μιλάμε για οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία φυσικών αριθμών με ομοιόμορφο τρόπο μέσω τριών αριθμών, δηλαδή του μήκους της και δυο 'κωδικών'. Αυτό το βασικό αποτέλεσμα θα χρησιμοποιηθεί αμέσως για την απόδειξη του εξής θεωρήματος:

Θεώρημα 4.3.3 *Κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη στο P.*

Απόδειξη. Αφού κάθε αναδρομική συνάρτηση προκύπτει μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας $f_1, \ldots, f_n$, όπου κάθε f_i είναι αρχική ή ορίζεται από προηγούμενες με αντικατάσταση, αναδρομή ή μ-τελεστή, αρκεί να δείξουμε ότι

α) οι αρχικές αναδρομικές συναρτήσεις είναι αναπαραστάσιμες στο P και

β) οι αναδρομικοί κανόνες μας οδηγούν από συναρτήσεις αναπαραστάσιμες στο P σε συναρτήσεις αναπαραστάσιμες στο P.

Το α) αποδείχθηκε για τις συναρτήσεις S και P_j^n σε προηγούμενα παραδείγματα - η περίπτωση της συνάρτησης Z είναι εύκολη.
Ας έρθουμε τώρα στο β). Στο παράδειγμα της σελίδας 93 είδαμε ότι η αντικατάσταση διατηρεί την αναπαραστασιμότητα συναρτήσεων.
<u>Αναδρομή:</u> Έστω ότι

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n) \\ &f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)), \end{aligned}$$

όπου οι g, h είναι αναπαραστάσιμες στο P. Ας υποθέσουμε ότι για τους τύπους $\varphi_g(x_1, \ldots, x_{n+1}), \ldots, \varphi_h(x_1, \ldots, x_{n+3})$ ισχύουν οι ιδιότητες α), β) του ορισμού 2) της αναπαραστασιμότητας (δες Πρόταση 4.3.1) για τις g, h. Θα δείξουμε ότι η f αναπαρίσταται στο P μέσω του τύπου $\varphi_f(x_1, \ldots, x_{n+2})$:

$$\begin{aligned} &\exists u \exists v [\exists w (\varphi_\beta(u, v, 0, w) \wedge \varphi_g(x_1, ..., x_n, w)) \wedge \varphi_\beta(u, v, x_{n+1}, x_{n+2}) \wedge \\ &\forall t (t < x_{n+1} \rightarrow \exists y \exists z (\varphi_\beta(u, v, t, y) \wedge \varphi_\beta(u, v, t', z) \wedge \varphi_h(x_1, ..., x_n, t, y, z)))]. \end{aligned}$$

Η ιδέα είναι η εξής: Για να βρούμε την τιμή $f(x_1, \ldots, x_n, y+1)$ απαιτείται να κάνουμε τα βήματα για την εύρεση των τιμών

$$\begin{aligned} &g(x_1, \ldots, x_n), \\ &h(x_1, \ldots, x_n, 0, f(x_1, \ldots, x_n, 0)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)), \end{aligned}$$

δηλαδή να διατρέξουμε μια πεπερασμένη ακολουθία $a_0, a_1, \ldots, a_y$ που ορίζεται με βάση τον ορισμό της f από τις g, h. Για την ακολουθία όμως αυτή μπορούμε να μιλήσουμε μέσω του μήκους της και δυο κωδικών (Θεώρημα 4.3.2). Θα ελέγξουμε ότι για τον τύπο φ_f ισχύουν τα α), β) του ορισμού 2 της αναπαραστασιμότητας.
Έστω ότι για κάποιους φυσικούς $m_1, \ldots, m_n,\ \ , l$ ισχύει η

$$f(m_1,\dots,m_n,\ \ ) = l.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$P \vdash \varphi_f(\underline{m_1},\dots,\underline{m_n},\underline{\ },\underline{l}).$$

Υποθέτοντας ότι $\ \ > 0$ (- αν $\ \ = 0$, τότε δουλεύουμε όμοια), θεωρούμε τους φυσικούς

$$\begin{aligned}
&a_0 = g(m_1,\dots,m_n),\\
&a_1 = h(m_1,\dots,m_n,0,g(m_1,\dots,m_n)),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&a_k = h(m_1,\dots,m_n,\ \ -1,f(m_1,\dots,m_n,\ \ -1)).
\end{aligned}$$

Λόγω του Θεωρήματος 4.3.2, υπάρχουν φυσικοί b,c τέτοιοι που $\beta(b,c,i) = a_i$ για $0 \le i \le\ \ $. Τότε θα ισχύουν τα εξής, αφού οι φ_g,φ_h αναπαριστούν τις g,h στο P και ο φ_β αναπαριστά τη β στο P:

$$\begin{aligned}
P \vdash\ & \varphi_\beta(\underline{b},\underline{c},\mathbf{0},\underline{a_0})\\
P \vdash\ & \varphi_g(\underline{m_1},\dots,\underline{m_n},\underline{a_0})\\
P \vdash\ & \varphi_\beta(\underline{b},\underline{c},\underline{\ },\underline{a_k})\\
P \vdash\ & \varphi_\beta(\underline{b},\underline{c},\underline{j},\underline{f(m_1,\dots,m_n,j)}) \land \varphi_\beta(\underline{b},\underline{c},\underline{j+1},\underline{f(m_1,\dots,m_n,j+1)}))\\
& \land\ \varphi_h(\underline{m_1},\dots,\underline{m_n},\underline{j},\underline{f(m_1,\dots,m_n,j)},\underline{f(m_1,\dots,m_n,j+1)})),\\
& \text{για κάθε } 0 \le j \le\ \ .
\end{aligned}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.4, ισχύει το ζητούμενο.
β) Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι για τυχόντες φυσικούς $m_1,\dots,m_n,\ \ $:

$$P \vdash \exists! x_{n+2}\varphi_f(\underline{m_1},\dots,\underline{m_n},\underline{\ },x_{n+2}) \quad (*).$$

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στη μεταγλώσσα, αφήνοντας την περίπτωση $\ \ = 0$ ως άσκηση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ισχύει η (*) και δείχνουμε ότι

$$P \vdash \exists! x_{n+2}\varphi_f(\underline{m_1},\dots,\underline{m_n},\underline{\ \ +1},x_{n+2}).$$

Λόγω του α) ανωτέρω, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}
P \vdash\ \ & \forall x_{n+2}[\varphi_f(\underline{m_1},\dots,\underline{m_n},\underline{\ \ +1},x_{n+2}) \to\\
& \qquad\qquad x_{n+2} = \underline{f(m_1,\dots,m_n,\ \ +1)}].
\end{aligned}$$

Έστω λοιπόν $\mathcal{A} \models P$ και $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο που

$$\mathcal{A} \models \varphi_f(\underline{m_1},\dots,\underline{m_n},a).$$

Τότε για κάποια $b^*, c^* \in |\mathcal{A}|$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \exists w(\varphi_\beta(b^*, c^*, 0, w) \wedge \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, w)) \wedge \varphi_\beta(b^*, c^*, \underline{\quad +1}, a) \wedge \\ \forall t(t < \underline{\quad +1} \rightarrow \exists y \exists z(\varphi_\beta(b^*, c^*, t, y) \wedge \varphi_\beta(b^*, c^*, t', z) \\ \wedge\ \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, t, y, z))).\end{aligned}$$

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχουν $b, c \in |\mathcal{A}|$ τέτοια που

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \qquad \exists w(\varphi_\beta(b, c, 0, w) \wedge \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, w)) \\ \wedge\ \varphi_\beta(b, c, \_, \underline{f(m_1, \dots, m_n, \ )}) \\ \wedge\ \forall t(t < \_ \rightarrow \exists y \exists z(\varphi_\beta(b, c, t, y) \wedge \varphi_\beta(b, c, t', z) \\ \wedge\ \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, t, y, z))).\end{aligned}$$

Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\mathcal{A} \models \forall t(t \leq \_ \rightarrow \forall y \forall z(\varphi_\beta(b, c, t, y) \wedge \varphi_\beta(b^*, c^*, t, z) \rightarrow t = z)).$$

Άρα, παίρνοντας $t = \_$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$P \vdash \forall x_{n+2}[\varphi_f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, \_, x_{n+2}) \rightarrow x_{n+2} = \underline{f(m_1, \dots, m_n, \ )}],$$

έχουμε ότι $\mathcal{A} \models \varphi_\beta(b^*, c^*, \_, \underline{f(m_1, \dots, m_n, \ )})$.
Λόγω όμως της υπόθεσης για τα b^*, c^*, ισχύει

$$\mathcal{A} \models \forall y \forall z(\varphi_\beta(b^*, c^*, \_, y) \wedge \varphi_\beta(b^*, c^*, \underline{\quad +1}, z) \rightarrow \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, \_, y, z)).$$

Άρα $\mathcal{A} \models \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, \_, \underline{f(m_1, \dots, m_n, \ )}, a)$,

οπότε $a = h(m_1, \dots, m_n, \ , f(m_1, \dots, m_n, \ )) = f(m_1, \dots, m_n, \ +1)$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.
<u>μ-τελεστής:</u> Έστω ότι $f(x_1, \dots, x_n) = \mu y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$, όπου η g είναι αναπαραστάσιμη στο P μέσω του τύπου $\varphi_g(x_1, \dots, x_{n+2})$. Θα δείξουμε ότι για τον τύπο $\varphi_f(x_1, \dots, x_{n+1})$:

$$\varphi_g(x_1, \dots, x_{n+1}, \mathbf{0}) \wedge \forall x_{n+2}(x_{n+2} < x_n \rightarrow \neg\varphi_g(x_1, \dots, x_n, x_{n+2}, \mathbf{0}))$$

ισχύουν τα α), β) του ορισμού 2) της αναπαραστασιμότητας.
α) Έστω ότι $f(m_1, \dots, m_n) = \ $. Τότε $g(m_1, \dots, m_n, \ ) = 0$ και $g(m_1, \dots, m_n, l) \neq 0$ για κάθε φυσικό $l < \ $. Άρα, λόγω της υπόθεσης για τον φ_g,

$$\begin{aligned}&P \vdash \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, \_, \mathbf{0}) \ \ (1)\\ &P \vdash \neg\varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, \underline{l}, \mathbf{0}) \text{ για κάθε } l < \quad (2).\end{aligned}$$

Οι (2), σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.2.4, συνεπάγονται ότι

$$P \vdash \forall x_{n+2}(x_{n+2} < \_ \to \neg\varphi_g(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+2}, \mathbf{0})),$$

οπότε, λόγω και της (1), έχουμε ότι $P \vdash \varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, \_)$.

β) Θέλουμε να δείξουμε ότι $P \vdash \exists! x_{n+1}\varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+1})$.

Θεωρούμε τυχόν $\mathcal{A} \models P$ και $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο που $\mathcal{A} \models \varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, a)$.

Λόγω του 6) της Πρότασης 4.2.3, ισχύει $\mathcal{A} \models a < \_ \vee a = \_ \vee \_ < a$, όπου $= f(m_1, \ldots, m_n)$.

Αν ίσχυε ότι $\mathcal{A} \models a < \_$, τότε θα ίσχυε $\mathcal{A} \models \neg\varphi_g(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, a)$, λόγω του ορισμού του φ_f, πράγμα αδύνατο.

Αν πάλι ίσχυε ότι $\mathcal{A} \models \_ < a$, τότε θα ίσχυε $\mathcal{A} \models \neg\varphi_g(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, \_)$, πάλι λόγω του ορισμού του φ_f, που είναι επίσης άτοπο.

Άρα ισχύει $\mathcal{A} \models a = \_$, δηλαδή το ζητούμενο.
Έτσι η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3 είναι πλήρης.

Η έννοια της αναδρομικότητας ορίζεται και για σχέσεις στους φυσικούς αριθμούς. Τον ορισμό αυτό και κάποια παραδείγματα θα δώσουμε τώρα.

Ορισμός 4.3.4 *Έστω $R \subseteq \mathbf{N}^n$, $n \geq 1$. Λέμε ότι η R είναι ('πρωτογενής') 'αναδρομική' ανν η χαρακτηριστική συνάρτηση C_R της R είναι (πρωτογενής) αναδρομική.*

Παραδείγματα. α) Η σχέση $=^{\mathbf{N}}$ στο $\mathbf{N}$ είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού η χαρακτηριστική της συνάρτηση ισούται με τη συνάρτηση $\overline{\Theta}(|x_1 \dot{-} x_2|)$, που είναι πρωτογενής αναδρομική (Άσκηση).
β) Η σχέση διαιρετότητας $|^{\mathbf{N}}$ είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού η χαρακτηριστική της συνάρτηση ισούται με τη $\overline{\Theta}(rm(x_2, x_1))$.
γ) Η σχέση $<^{\mathbf{N}}$ είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού η χαρακτηριστική της συνάρτηση ισούται με τη $\overline{\Theta}(x_1 \dot{-} x_2)$.
δ) Η σχέση $pr(x)$, που εκφράζει "ο x είναι πρώτος", είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού η χαρακτηριστική της συνάρτηση ισούται με τη

$$\overline{\Theta}((|\delta(x) \dot{-} 2|) + \overline{\Theta}(|x \dot{-} 1|) + \overline{\Theta}(|x \dot{-} 0|)).$$

Αν έχουμε n-μελείς σχέσεις R_1, R_2 στο $\mathbf{N}$, μπορούμε να ορίσουμε νέες, χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους ως εξής:

$$\neg R = \{< x_1, ..., x_n > \in \mathbf{N}^n : < x_1, ..., x_n > \notin R_1\}$$

$$R_1 \vee R_2 = \{< x_1, ..., x_n > \in \mathbf{N}^n : < x_1, ..., x_n > \in R_1 \text{ ή } < x_1, ..., x_n > \in R_2\}$$

και όμοια για τους $\wedge, \to, \leftrightarrow$. Αν τώρα R είναι μια $n+1$-μελής σχέση στο $\mathbf{N}$, ορίζουμε νέες σχέσεις μέσω των 'φραγμένων ποσοδεικτών' ως εξής:

$$\forall y < zR = \{< x_1, \ldots, x_n >: \text{για κάθε } y < z \text{ ισχύει } < x_1, \ldots, x_n, y > \in R\},$$
$$\exists y < zR = \{< x_1, \ldots, x_n >: \text{υπάρχει } y < z \text{ ισχύει } < x_1, \ldots, x_n, y > \in R\}.$$

Επίσης, αν R $n+1$-μελής σχέση στο $\mathbf{N}$, ορίζουμε μια συνάρτηση μέσω του φραγμένου μ-τελεστή ως εξής:

$$\mu y < zR(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} \text{το ελάχιστο } y < z \text{ τ.π.} & \text{αν υπάρχει} \\ < x_1, \ldots, x_n, y > \in R, & \text{τέτοιο } y \\ \text{z}, & \text{αλλις.} \end{cases}$$

Όμοια δουλεύουμε με τους ποσοδείκτες $\forall y \leq z$, $\exists y \leq z$ και τον τελεστή $\mu y \leq z$.

Πρόταση 4.3.5 *Αν R_1, R_2 είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές σχέσεις, τότε και οι σχέσεις $\neg R_1, R_1 \vee R_2, R_1 \wedge R_2, R_1 \to R_2, R_1 \leftrightarrow R_2$ είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές.*
Αν η R είναι (πρωτογενής) αναδρομική σχέση, τότε και οι σχέσεις $\forall y < zR, \exists y < zR, \forall y \leq zR, \exists y \leq zR$ και οι συναρτήσεις $\mu y < zR, \mu y \leq zR$ είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές.

Απόδειξη. Άσκηση.

Η προηγούμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη για να δείχνουμε ότι διάφορες σχέσεις και συναρτήσεις είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές.
Παραδείγματα. 1) Έστω $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ η συνάρτηση με $p(x) = (x+1)$-οστός πρώτος. Η p είναι πρωτογενής αναδρομική, διότι ορίζεται ως

$$\begin{aligned} &p(0) = 2 \\ &p(x+1) = \mu y \leq p(x)! + 1(p(x) < y \wedge pr(y)). \end{aligned}$$

Συνήθως γράφουμε p_x αντί για $p(x)$.
2) Έστω $(\ )_k : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ η συνάρτηση με $(x)_k = 0$, αν $x = 0$, και $(x)_k =$ εκθέτης του πρώτου p_k στην ανάλυση του x σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων, αν $x \neq 0$. Η $(\ )_k$ είναι πρωτογενής αναδρομική για κάθε $\ \in \mathbf{N}$, αφού

$$(x)_k = \mu y < x(p_k^y | x \wedge p_k^{y+1} \not| x).$$

3) Έστω $lh : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$lh(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \text{αριθμός διαφορετικών πρώ-} & \\ \text{των που διαιρούν τον } x, & \text{αν } x \neq 0. \end{cases}$$

Η lh είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού ισχύει η

$$lh(x) = \sum_{y \leq x} \Theta(C_R(x, y)),$$

όπου C_R είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της σχέσης $pr(y) \wedge y|x \wedge x \neq 0$.
4) Έστω $\frown$: $\mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ η συνάρτηση 'συμπαράθεσης', η οποία ορίζεται ως εξής (για μη τετριμμένες τιμές των x, y):

αν $x = 2^{a_0} \dots p_k^{a_k}$ και $y = 2^{b_0} \dots p_l^{b_l}$, τότε $x \frown y = 2^{a_0} \dots p_k^{a_k} . p_{k+1}^{b_0} \dots p_{k+1+l}^{b_l}$.

Τότε η $\frown$ είναι πρωτογενής αναδρομική, αφού ισχύει

$$x \frown y = x . \prod_{j < lh(y)} (p_{lh(x)+j})^{(y)_j}.$$

Συνεχίζουμε με κάποιες προτάσεις απαραίτητες για τη συνέχεια.

Πρόταση 4.3.6 *Κάθε αναδρομική σχέση στο $\mathbf{N}$ είναι εκφράσιμη στο P.*

Απόδειξη. Προφανής, λόγω του Θεωρήματος 4.3.3 και των ορισμών.

Πρόταση 4.3.7 *Έστω ότι οι σχέσεις $R_1, \dots, R_k$ διαμερίζουν το $\mathbf{N}^n$ και $g_1, \dots, g_k$ είναι n-θέσιες συναρτήσεις στο $\mathbf{N}$ ($n \geq 1$). Ορίζουμε την f : $\mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ ως εξής:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n), & \text{αν ισχύει } < x_1, \dots, x_n > \in R_1 \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k(x_1, \dots, x_n), & \text{αν ισχύει } < x_1, \dots, x_n > \in R_k. \end{cases}$$

Αν οι $R_1, \dots, R_k, g_1, \dots, g_k$ είναι (πρωτογενείς) αναδρομικές, τότε η f είναι (πρωτογενής) αναδρομική.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = \quad & g_1(x_1, \dots, x_n) \cdot C_{R_1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + \\ & g_k(x_1, \dots, x_n) \cdot C_{R_k}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Η επόμενη πρόταση αφορά την αναδρομή στο πεδίο τιμών, την οποία αναφέραμε και πριν.

Πρόταση 4.3.8 *Αν η συνάρτηση $h : \mathbf{N}^{n+2} \to \mathbf{N}$, $n \geq 1$, είναι (πρωτογενής) αναδρομική και η συνάρτηση $f : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ ορίζεται ως*

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = h(x_1, \dots, x_n, y, f^{\#}(x_1, \dots, x_n, y)),$$

όπου $f^{\#}(x_1, \dots, x_n, y) = \prod_{u<y} p_u^{f(x_1, \dots, x_n, u)}$, τότε η f είναι (πρωτογενής) αναδρομική συνάρτηση.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f^{\#}(x_1,\ldots,x_n,0) &= 1 \\ f^{\#}(x_1,\ldots,x_n,y+1) &= f^{\#}(x_1,\ldots,x_n,y)\cdot p_y^{f(x_1,\ldots,x_n,y)} \\ &= f^{\#}(x_1,\ldots,x_n,y)\cdot (p_y)^{h(x_1,\ldots,x_n,y,f^{\#}(x_1,\ldots,x_n,y))}\ . \end{aligned}$$

Άρα, αν η h είναι (πρωτογενής) αναδρομική, τότε και η $f^{\#}$ είναι (πρωτογενής) αναδρομική, οπότε και η f είναι (πρωτογενής) αναδρομική.

Πόρισμα 4.3.1 *Έστω $Q \subseteq \mathbf{N}^{n+2}$ (πρωτογενής) αναδρομική σχέση και $R \subseteq \mathbf{N}^{n+1}$ η σχέση που ορίζεται ως εξής:*

$$< x_1,\ldots,x_n >\in R \quad ανν \quad < x_1,\ldots,x_n,y,C_R^{\#}(x_1,\ldots,x_n,y) >\in Q.$$

Τότε η είναι (πρωτογενής) αναδρομική.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$C_R(x_1,\ldots,x_n,y) = C_Q(x_1,\ldots,x_n,y,C_R^{\#}(x_1,\ldots,x_n,y)).$$

Το ζητούμενο έπεται με βάση την προηγούμενη Πρόταση.

Θα τελειώσουμε την παρούσα παράγραφο με μια αναφορά στην αποκαλούμενη 'συνάρτηση ζευγαρώματος', η οποία είναι μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία των στοιχείων του $\mathbf{N}^2$ με στοιχεία του $\mathbf{N}$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $[\ ,\ ]$ που ορίζεται ως $[x,y] = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$. Ο αριθμός $[a,b]$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των σημείων με συντεταγμένες φυσικούς αριθμούς που βρίσκονται πάνω στις ευθείες $x+y=n$, $0 \le n \le a+b-1$, και στην ευθεία $x+y=a+b$ με $x<a$. Από τα προηγούμενα προκύπτει εύκολα ότι η $[\ ,\ ]$ είναι πρωτογενής αναδρομική. Επίσης επαληθεύεται ότι η $[\ ,\ ]$ είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφη της $[\ ,\ ]$ δίνεται μέσω των εξής συναρτήσεων (προβολής):

$$\begin{aligned} &[\ ]_1 : \mathbf{N}\to\mathbf{N} \text{ με } [z]_1 = x \text{ ανν } \exists y \le z([x,y]=z) \\ &[\ ]_2 : \mathbf{N}\to\mathbf{N} \text{ με } [z]_2 = y \text{ ανν } \exists x \le z([x,y]=z). \end{aligned}$$

Λόγω της Πρότασης 4.3.5, οι $[\ ]_1$, $[\ ]_2$ είναι πρωτογενείς αναδρομικές.

4.4 Αριθμητικοποίηση

Για ν' αποδείξουμε το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.3.3, χρειαζόμαστε την κωδικοποίηση των συντακτικών εννοιών με φυσικούς αριθμούς που εφεύρε ο Gödel. Ο Gödel είχε την πρωτοπόρα ιδέα ν' αντιστοιχίσει ένα φυσικό αριθμό σε κάθε σύμβολο της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και κατόπιν να χρησιμοποιήσει αυτούς τους αριθμούς για να αντικαταστήσει εκφράσεις που αφορούν ένα τυπικό σύστημα όπως το P με εκφράσεις που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς. Η ιδέα αυτή ήταν θεμελιώδους σημασίας για την απόδειξη όχι μόνο των θεωρημάτων μη-πληρότητας, αλλά και πολλών άλλων αποτελεσμάτων. Η κωδικοποίηση μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, ένα από τους οποίους εκθέτουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 4.4.1 *α) Σε κάθε σύμβολο σ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ αντιστοιχούμε ένα φυσικό αριθμό που καλούμε 'κωδικό Gödel' και συμβολίζουμε $c(\sigma)$, ως εξής:*

$$\begin{array}{ll} c(v_i) = 3^i & c(\approx) = 17 \\ c(\neg) = 5 & c(\prime) = 19 \\ c(\to) = 7 & c(\oplus) = 21 \\ c(\forall) = 11 & c(\odot) = 23 \\ c(() = 13 & c(\mathbf{0}) = 25 \\ c()) = 15 & \end{array}$$

β) Έστω $\sigma_0 \ldots \sigma_k$ μια έκφραση της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ (δηλαδή μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$). Καλούμε 'αριθμό Gödel' της $\sigma_0 \ldots \sigma_k$, και συμβολίζουμε με $\ulcorner \sigma_0 \ldots \sigma_k \urcorner$, τον αριθμό $2^{c(\sigma_0)} \,.\, 3^{c(\sigma_1)} \,.\, \ldots \,.\, p_k^{c(\sigma_k)}$ (όπου p_i είναι ο $(i+1)$-οστός πρώτος αριθμός).
γ) Έστω $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ μια πεπερασμένη ακολουθία εκφράσεων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$. Καλούμε 'αριθμό Gödel' της $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$, και συμβολίζουμε με $\ulcorner \varphi_0, \ldots, \varphi_k \urcorner$, τον αριθμό $2^{\ulcorner \varphi_0 \urcorner} \,.\, 3^{\ulcorner \varphi_1 \urcorner} \,.\, \ldots \,.\, p_k^{\ulcorner \varphi_k \urcorner}$.

Παρατηρούμε ότι σε διαφορετικές εκφράσεις αντιστοιχούν διαφορετικοί αριθμοί Gödel, σε διαφορετικές ακολουθίες εκφράσεων αντιστοιχούν διαφορετικοί αριθμοί Gödel και ο αριθμός Gödel μιας έκφρασης που αποτελείται από ένα μόνο σύμβολο είναι διαφορετικός από τον κωδικό Gödel του συμβόλου αυτού. Επίσης, κάθε αριθμός Gödel έκφρασης είναι διαφορετικός από κάθε αριθμό Gödel ακολουθίας εκφράσεων, αφού στην ανάλυση ενός αριθμού Gödel έκφρασης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων το 2 εμφανίζεται σε περιττή δύναμη, ενώ στην ανάλυση ενός αριθμού Gödel ακολουθίας εκφράσεων εμφανίζεται σε άρτια δύναμη. Επίσης παρατηρούμε ότι, αν μας δοθεί τυχών φυσικός n, μπορούμε να ελέγξουμε αποτελεσματικά αν ο n είναι αριθμός Gödel κάποιας έκφρασης ή ακολουθίας εκφράσεων - δεν είναι βέβαια όλοι οι φυσικοί αριθμοί Gödel.

Πρόταση 4.4.1 *Οι ακόλουθες σχέσεις και συναρτήσεις είναι αναδρομικές:*

1) *$VB(x)$: ο x είναι αριθμός Gödel έκφρασης που αποτελείται από μια μόνο μεταβλητή*

2) $EX(x)$: ο x είναι αριθμός Gödel έκφρασης

3) $MP(x,y,z)$: ο z είναι αριθμός Gödel έκφρασης που είναι άμεση συνέπεια με βάση το MP των εκφράσεων με αριθμούς Gödel x,y

4) $TE(x)$: ο x είναι αριθμός Gödel κάποιου όρου (της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$)

5) $AF(x)$: ο x είναι αριθμός Gödel κάποιου ατομικού τύπου (της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$)

6) $FM(x)$: ο x είναι αριθμός Gödel κάποιου τύπου (της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$)

7) $SUB(x,y,u,v)$: ο x είναι αριθμός Gödel της έκφρασης που προκύπτει αν στην έκφραση με αριθμό Gödel y αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή με αριθμό Gödel u σε όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της με τον όρο με αριθμό Gödel v

8) $SU(y,u,v)$ = ο αριθμός Gödel της έκφρασης που προκύπτει αν στην έκφραση με αριθμό Gödel y αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή με αριθμό Gödel u σε όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της με τον όρο με αριθμό Gödel v

9) $ANT(u,v,w)$: ο u είναι αριθμός Gödel μιας μεταβλητής που είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο με αριθμό Gödel v στον τύπο με αριθμό Gödel w

10) $LA(x)$: ο x είναι αριθμός Gödel κάποιου αξιώματος

11) $N(x)$= ο αριθμός Gödel της άρνησης της έκφρασης με αριθμό Gödel x

12) $C(x,y)$= ο αριθμός Gödel της συνεπαγωγής των εκφράσεων με αριθμούς Gödel x,y

13) $NU(y)$= ο αριθμός Gödel του ψηφίου $\underline{y}$

14) $D(u)$= ο αριθμός Gödel της πρότασης $\varphi(\underline{u})$, όπου u είναι ο αριθμός Gödel κάποιου τύπου της μορφής $\varphi(x_0)$ (η D καλείται 'διαγώνια' συνάρτηση)

15) $P(y)$: ο y είναι αριθμός Gödel ενός από τα αξιώματα $P1-P7$

16) $Prf(y)$: ο y είναι αριθμός Gödel μιας τυπικής απόδειξης από το P

17) $PF(y,x)$: ο y είναι αριθμός Gödel μιας τυπικής απόδειξης από το P, η οποία τελειώνει με ένα τύπο του οποίου αριθμός Gödel είναι ο x.

Απόδειξη. Δίνουμε απόδειξη μόνο για λίγες περιπτώσεις - οι υπόλοιπες είναι όμοιες, αν και κάπως δυσκολότερες στις λεπτομέρειες.
1) Η VB είναι πρωταρχική αναδρομική, αφού ισχύει

$$VB(x) \text{ ανν } \exists y < x(x = 2^{3^y}).$$

2) Η EX είναι πρωταρχική αναδρομική, αφού ισχύει

$$\begin{aligned} EX(x) \text{ ανν } \quad & VB(x) \vee x = 2^5 \vee x = 2^7 \vee x = 2^{11} \vee x = 2^{13} \vee x = 2^{15} \\ & \vee x = 2^{17} \vee x = 2^{19} \vee x = 2^{21} \vee x = 2^{23} \vee x = 2^{25} \\ & \vee \exists u < x \exists v < x(x = u \frown v \wedge EX(u) \wedge EX(v)). \end{aligned}$$

4) Η TE είναι πρωταρχική αναδρομική, αφού ισχύει

$$\begin{aligned} TE(x) \text{ ανν } \quad & VB(x) \vee x = 2^{25} \vee \exists u < x(x = 2^{19} \frown u \wedge TE(u)) \vee \\ & \exists u < x \exists v < x[TE(u) \wedge TE(v) \wedge (x = 2^{21} \frown u \frown v \\ & \vee x = 2^{23} \frown u \frown v)]. \end{aligned}$$

6) Η FM είναι πρωταρχική αναδρομική, αφού ισχύει

$$\begin{aligned} FM(x) \text{ ανν } \quad & AF(x) \vee \exists z < x(FM(z) \wedge x = 2^5 \frown z) \vee \exists z < x \\ & \exists t < x(FM(z) \wedge FM(t) \wedge x = 2^{13} \frown z \frown 2^7 \frown t \frown 2^{15}) \vee \\ & \exists z < x \exists t < x(FM(z) \wedge VB(t) \wedge x = 2^{11} \frown t \frown z). \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε ό,τι χρειάζεται για ν' αποδείξουμε το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.3.3.

Θεώρημα 4.4.1 *Έστω ότι το P είναι συνεπές. Κάθε συνάρτηση αναπαραστάσιμη στο P είναι αναδρομική.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το P είναι συνεπές και ας θεωρήσουμε τυχούσα συνάρτηση $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, $n \geq 1$, που είναι αναπαραστάσιμη στο P. Έστω ότι ο τύπος $\varphi_f(x_1, \ldots, x_{n+1})$ αναπαριστά την f στο P. Η ιδέα της απόδειξης είναι η εξής:
Για τυχόντες φυσικούς $m_1, \ldots, m_{n+1}$, αν $f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$, τότε $P \vdash \varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$. Όμως η έννοια της τυπικής συνεπαγωγής είναι αναδρομική και έχει αριθμητικοποιηθεί μέσω των αριθμών Gödel. Άρα το γεγονός ότι $P \vdash \varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$ μπορεί να οριστεί μέσω μιας αναδρομικής συνάρτησης, πράγμα που οδηγεί σε αναδρομικό ορισμό της f.
Περνώντας τώρα στις λεπτομέρειες, θεωρούμε τη σχέση $Q(x_1, \ldots, x_{n+1}, y)$ που εκφράζει "ο y είναι αριθμός Gödel μιας τυπικής απόδειξης από το P της πρότασης $\varphi_f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_{n+1}})$", δηλαδή τη σχέση

$$PF(y, SU(...(SU(\quad, 2^{3^{c(x_1)}}, NU(x_1)), 2^3, NU(x_2)), \ldots, 2^{3^{c(x_{n+1})}}, NU(x_{n+1}))),$$

όπου   είναι ο αριθμός Gödel του τύπου $\varphi_f(x_1, \ldots, x_{n+1})$.
Παρατηρούμε ότι για τυχόντες φυσικούς $m_1, \ldots, m_{n+1}, l$,

αν αληθεύει ότι $Q(m_1, \ldots, m_{n+1}, l)$, τότε $f(m_1, \ldots, m_n) = m_{n+1}$.

Πράγματι, έστω ότι ισχύει $Q(m_1, \ldots, m_{n+1}, l)$. Τότε έχουμε $P \vdash \varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$.
Επειδή ο φ_f αναπαριστά την f στο P, ισχύουν οι

$$P \vdash \varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, \underline{f(m_1, \ldots, m_n)})$$
$$P \vdash \exists! x_{n+1} \varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n}, x_{n+1}).$$

Άρα $P \vdash \underline{m_{n+1}} = \underline{f(m_1, \ldots, m_n)}$ και συνεπώς, λόγω της Πρότασης 4.2.2 και της υπόθεσης ότι το P είναι συνεπές, ισχύει $m_{n+1} = f(m_1, \ldots, m_n)$.
Η σχέση Q είναι πρωτογενής αναδρομική, λόγω της Πρότασης 4.4.1. Για να ορίσουμε την f μέσω της Q εργαζόμαστε ως εξής: Έστω $m_1, \ldots, m_n$ τυχόντες φυσικοί αριθμοί. Τότε υπάρχουν φυσικοί m_{n+1}, l τέτοιοι που ο l είναι αριθμός Gödel μιας τυπικής απόδειξης από το P της πρότασης $\varphi_f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_{n+1}})$.
Από τον ορισμό της Q, θα ισχύει τότε $Q(m_1, \ldots, m_{n+1}, l)$. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ζευγαρώματος, έχουμε ότι υπάρχει $j \in \mathbf{N}$ τέτοιο που

$$< m_1, \ldots, m_n, [j]_1, [j]_2 > \in Q \quad (*).$$

Η τιμή της f στο $< m_1, \ldots, m_n >$, δηλαδή ο $[j]_1$, μπορεί να βρεθεί αν θεωρήσουμε το ελάχιστο j για το οποίο ισχύει η (*) και κατόπιν κρατήσουμε την πρώτη συντεταγμένη του (μέσω της αντίστροφης της συνάρτησης [,]).
Έχουμε λοιπόν $f(m_1, \ldots, m_n) = [\mu y(Q(m_1, \ldots, m_n, [y]_1, [y]_2))]_1$ και συνεπώς η f είναι αναδρομική.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος και των ορισμών είναι το

Πόρισμα 4.4.1 *Αν το P είναι συνεπές, τότε κάθε σχέση εκφράσιμη στο P είναι αναδρομική.*

4.5 Πρ το θε ρημα μη-πληρότητας

Τώρα έχουμε σχεδόν ό,τι χρειαζόμαστε για την απόδειξη του ενός από τα δυο θεωρήματα τα οποία στοχεύαμε από την αρχή του κεφαλαίου. Πρώτα θα δούμε ένα βασικό αποτέλεσμα, που υπήρχε ουσιαστικά στην εργασία του Gödel, αλλά δεν αναφερόταν σαφώς.

Θεώρημα 4.5.1 (Θεώρημα σταθερού σημείου) *Για κάθε τύπο $\varphi(x_1)$ υπάρχει μια πρόταση τ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που $P \vdash \tau \leftrightarrow \varphi(\underline{\ulcorner \tau \urcorner})$.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε, η διαγώνια συνάρτηση D είναι πρωτογενής αναδρομική. Άρα, λόγω του Θεωρήματος 4.3.3, η D είναι αναπαραστάσιμη στο P, ας πούμε μέσω του τύπου $\varphi_D(x_1, x_2)$. Έστω τώρα $\varphi(x_1)$ τυχών τύπος. Θεωρούμε τον τύπο $\psi(x_1) : \forall x_2(\varphi_D(x_1, x_2) \to \varphi(x_2))$.
Έστω $m = \ulcorner \psi(x_1) \urcorner$ και τ η πρόταση $\forall x_2(\varphi_D(\underline{m}, x_2) \to \varphi(x_2))$. Θα δείξουμε ότι $P \vdash \tau \leftrightarrow \varphi(\underline{\ulcorner \tau \urcorner})$.
α) Έστω ότι $\mathcal{A} \models P$ και $\mathcal{A} \models \tau$. Τότε $\mathcal{A} \models \forall x_2(\varphi_D(\underline{m}, x_2) \to \varphi(x_2))$, άρα $\mathcal{A} \models \varphi_D(\underline{m}, \underline{\ulcorner \tau \urcorner}) \to \varphi(\underline{\ulcorner \tau \urcorner})$. Όμως ο φ_D αναπαριστά τη D στο P και ισχύει $D(m) = \ulcorner \tau \urcorner$. Άρα $P \vdash \varphi_D(\underline{m}, \underline{\ulcorner \tau \urcorner})$, οπότε $\mathcal{A} \models \varphi_D(\underline{m}, \underline{\ulcorner \tau \urcorner})$, από όπου έπεται ότι $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{\ulcorner \tau \urcorner})$, δηλαδή το ζητούμενο.
β) Έστω τώρα $\mathcal{A} \models P$ τέτοιο που $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{\ulcorner \tau \urcorner})$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathcal{A} \models \tau$, δηλαδή ότι $\mathcal{A} \models \forall x_2(\varphi_D(\underline{m}, x_2) \to \varphi(x_2))$. Ας θεωρήσουμε $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο που $\mathcal{A} \models \varphi_D(\underline{m}, a)$. Επειδή $\mathcal{A} \models \varphi_D(\underline{m}, \underline{\ulcorner \tau \urcorner})$ και $\mathcal{A} \models \exists! x_2 \varphi_D(\underline{m}, x_2)$, θα ισχύει $\mathcal{A} \models a = \underline{\ulcorner \tau \urcorner}$. Συνεπώς, λόγω (ουσιαστικά) του ΑΣ8, θα ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi(a)$, δηλαδή το ζητούμενο.

Η μορφή του πρώτου θεωρήματος μη-πληρότητας που απέδειξε ο Gödel αναφερόταν σε μια συνθήκη που ικανοποιούσε το P και ήταν ισχυρότερη από τη συνέπεια. Την έννοια αυτή θα ορίσουμε τώρα.

Ορισμός 4.5.1 *Έστω T σύνολο προτάσεων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$. Λέμε ότι το T είναι 'ω-συνεπές' ανν για κάθε τύπο $\varphi(x)$: αν $T \vdash \neg\varphi(\underline{n})$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $T \nvdash \exists x \varphi(x)$.*

Εύκολα επαληθεύουμε ότι αν $\mathcal{N} \models T$, τότε το T είναι ω-συνεπές.

Πρόταση 4.5.1 *Αν το $T \subseteq \Pi(\Gamma_1^{\theta\alpha})$ είναι ω-συνεπές, τότε το T είναι συνεπές.*

Απόδειξη. Έστω ότι το T είναι ω-συνεπές. Για να δείξουμε ότι το T είναι συνεπές, αρκεί να βρούμε μια πρόταση της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που δεν αποδεικνύεται τυπικά από το T. Θεωρούμε τον τύπο $\varphi(x) : x \neq x$. Προφανώς ισχύει $T \vdash \neg\varphi(\underline{n})$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ (λόγω ΑΣ5), άρα $T \nvdash \exists x \varphi(x)$ (λόγω ω-συνέπειας). Συνεπώς το T είναι συνεπές.

Παρατήρηση. Είναι γνωστό ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της προηγούμενης Πρότασης.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το

Θεώρημα 4.5.2 (Πρώτο θεώρημα μη-πληρότητας) *Υπάρχει πρόταση τ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που*

α) αν το P είναι συνεπές, τότε $P \nvdash \tau$ και *β) αν το P είναι ω-συνεπές, τότε $P \nvdash \neg\tau$.*

Απόδειξη. Η σχέση PF είναι εκφράσιμη στο P, αφού είναι αναδρομική λόγω της Πρότασης 4.4.1. Έστω $\varphi_{PF}(x_1, x_2)$ τύπος που αναπαριστά την PF στο P. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Σταθερού Σημείου για τον τύπο $\forall x_1 \neg\varphi_{PF}(x_1, x_2)$ έχουμε ότι υπάρχει πρόταση τ_G της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που

$$P \vdash \tau_G \leftrightarrow \forall x_1 \neg\varphi_{PF}(x_1, \underline{\lceil\tau_G\rceil}) \quad (*).$$

Θα δείξουμε ότι ισχύουν τα α), β) για την τ_G.
α) Έστω ότι το P είναι συνεπές και $P \vdash \tau_G$. Τότε υπάρχει μια τυπική απόδειξη του τ_G από το P, ας πούμε με αριθμό Gödel p. Λόγω ορισμού του φ_{PF}, ισχύει $P \vdash \varphi_{PF}(\underline{p}, \underline{\lceil\tau_G\rceil})$. Όμως, λόγω της (*), ισχύει $P \vdash \forall x_1 \neg\varphi_{PF}(x_1, \underline{\lceil\tau_G\rceil})$, οπότε καταλήγουμε σε αντίφαση.
β) Έστω ότι το P είναι ω-συνεπές και $P \vdash \neg\tau_G$. Τότε, λόγω της (*), ισχύει $P \vdash \exists x_1 \varphi_{PF}(x_1, \underline{\lceil\tau_G\rceil})$. Λόγω ω-συνέπειας, έπεται ότι υπάρχει φυσικός n τέτοιος που $P \nvdash \neg\varphi_{PF}(\underline{n}, \underline{\lceil\tau_G\rceil})$. Αφού το P είναι συνεπές (Πρόταση 4.5.1), προκύπτει ότι $P \nvdash \tau_G$, άρα, για κάθε φυσικό αριθμό n, ο n δεν είναι αριθμός Gödel τυπικής απόδειξης του τ_G από το P, οπότε, για κάθε φυσικό n, $< n, \lceil\tau_G\rceil > \notin PF$ ή $P \vdash \neg\varphi_{PF}(\underline{n}, \underline{\lceil\tau_G\rceil})$. Έτσι όμως καταλήγουμε σε αντίφαση.

Παρατηρήσεις. 1) Το προηγούμενο θεώρημα δίνει και το εξής:
Υπάρχει τ τέτοιο που αν το P είναι ω-συνεπές, τότε $P \nvdash \tau$ και $P \nvdash \neg\tau$ ή, όπως λέμε αλλιώς, η τ είναι 'αναποκρίσιμη' πρόταση για το P.
2) Αν υποθέσουμε ότι $\mathcal{N} \models P$ (οπότε το P είναι ω-συνεπές), τότε το προηγούμενο θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:
Υπάρχει $\tau \in \Pi(\Gamma_1^{\theta\alpha})$ τέτοια που $\mathcal{N} \models \tau$ και $P \nvdash \tau$.
Αυτό έπεται από το γεγονός ότι η τ εκφράζει (μέσω της αριθμητικοποίησης) "Εγώ δεν αποδεικνύομαι από το P".

Η υπόθεση "το P είναι ω-συνεπές" στο β) του προηγούμενου θεωρήματος μπορεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση "το P είναι συνεπές". Αυτό αποδείχθηκε από τον J. B. Rosser το 1936, ο οποίος εφάρμοσε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου για ένα τύπο πιο πολύπλοκο από αυτόν που είδαμε πριν.

Θεώρημα 4.5.3 (Rosser) *Υπάρχει πρόταση τ_R της $\Gamma_{\theta\alpha}$ τέτοια που αν το P είναι συνεπές, τότε $P \nvdash \tau_R$ και $P \nvdash \neg\tau_R$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το P είναι συνεπές. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου για τον τύπο

$$\forall x_1[\varphi_{PF}(x_1, x_2) \to \forall x_3(\varphi_N(x_2, x_3) \to \exists x_4(x_4 \leq x_1 \wedge \varphi_{PF}(x_4, x_3)))],$$

ο οποίος εκφράζει "για κάθε αριθμό Gödel x_1 μιας τυπικής απόδειξης (από το P) του τύπου με αριθμό Gödel x_2 υπάρχει ένας αριθμός Gödel $x_4 \leq x_1$ μιας τυπικής απόδειξης (από το P) της άρνησης του τύπου με αριθμό Gödel x_2". Έτσι προκύπτει πρόταση τ_R της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που

$$P \vdash \tau_R \leftrightarrow \forall x_1[\varphi_{PF}(x_1, \underline{\lceil \tau_R \rceil}) \to \forall x_3(\varphi_N(\underline{\lceil \tau_R \rceil} x_3) \to \exists x_4(x_4 \leq x_1 \\ \wedge \varphi_{PF}(x_4, x_3)))] \quad (*).$$

Θα δείξουμε ότι η τ_R είναι αναποκρίσιμη στο P.

α) Έστω ότι $P \vdash \tau_R$. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός   που είναι αριθμός Gödel τυπικής απόδειξης από το P του τ_R. Επειδή $P \vdash \varphi_{PF}(\underline{\ }, \underline{\lceil \tau_R \rceil})$, λόγω της (*) προκύπτει ότι

$$P \vdash \forall x_3(\varphi_N(\underline{\lceil \tau_R \rceil}, x_3) \to \exists x_4 \leq \underline{\ } \wedge \varphi_{PF}(x_4, x_3))) \quad (**).$$

Θέτουμε $l = \lceil \neg\tau_R \rceil$, οπότε $P \vdash \varphi_R(\underline{\lceil \tau_R \rceil}, \underline{l})$, άρα, λόγω της (**), $P \vdash \exists x_4(x_4 \leq \underline{\ } \wedge \varphi_{PF}(x_4, \underline{l}))$. Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 4.2.4, υπάρχει $m \leq$ τέτοιος που $P \vdash \varphi_{PF}(\underline{m}, \underline{l})$. Όμως υποθέσαμε ότι το P είναι συνεπές και $P \vdash \tau_R$. Άρα $P \not\vdash \neg\tau_R$, οπότε για κάθε φυσικό αριθμό m: $P \vdash \neg\varphi_{PF}(\underline{m}, \underline{l})$, πράγμα άτοπο.

β) Έστω ότι $P \vdash \neg\tau_R$, οπότε

$$P \vdash \exists x_1[\varphi_{PF}(x_1, \underline{\lceil \tau_R \rceil}) \wedge \exists x_3(\varphi_N(\underline{\lceil \tau_R \rceil}, x_3) \wedge \forall x_4(x_4 \leq x_1 \to \neg\varphi_{PF}(x_4, x_3)))].$$

Θεωρούμε τώρα nonstandard μοντέλο $\mathcal{A}$ του P. Τότε υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο που

$$\mathcal{A} \models \varphi_{PF}(a, \underline{\lceil \tau_R \rceil}) \wedge \exists x_3(\varphi_N(\underline{\lceil \tau_R \rceil}, x_3) \wedge \forall x_4(x_4 \leq a \to \neg\varphi_{PF}(x_4, x_3))).$$

Επειδή $P \not\vdash \tau_R$, αφού P συνεπές, για κάθε $\in \mathbf{N}$ ισχύει: $P \vdash \neg\varphi_{PF}(\underline{\ }, \underline{\lceil \tau_R \rceil})$. Άρα $\mathcal{A} \models \neg\varphi_{PF}(\underline{\ }, \underline{\lceil \tau_R \rceil})$ για κάθε $\in \mathbf{N}$ και συνεπώς $a \neq (\underline{\ })^{\mathcal{A}}$ για κάθε $\in \mathbf{N}$. Όμως υπάρχει φυσικός l που είναι αριθμός Gödel τυπικής απόδειξης (από το P) της $\neg\tau_R$, άρα $P \vdash \varphi_{PF}(\underline{l}, \underline{\lceil \tau_R \rceil})$ για κάποιο $l \in \mathbf{N}$ (*).
Τότε όμως $\mathcal{A} \models \varphi_{PF}(\underline{l}, \underline{\lceil \neg\tau_R \rceil})$ για κάποιο $l \in \mathbf{N}$ και ταυτόχρονα

$$\mathcal{A} \models \exists x_3(\varphi_N(\underline{\lceil \tau_R \rceil}, x_3) \wedge \forall x_4(x_4 \leq a \to \neg\varphi_{PF}(x_4, x_3))) \quad (**).$$

Από την (**) προκύπτει ότι $\mathcal{A} \models \forall x_4(x_4 \leq a \to \neg\varphi_{PF}(x_4, \underline{\lceil \tau_R \rceil}))$, πράγμα που αντιφάσκει με την (*), αφού προφανώς $\mathcal{A} \models \underline{l} \leq a$.

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, το πρώτο θεώρημα μη-πληρότητας ισχύει και για άλλα σύνολα αξιωμάτων. Συγκεκριμένα, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 4.5.4 *Έστω A σύνολο προτάσεων της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοιο που*

1) η ιδιότητα $R_A = \{n \in \mathbf{N} : n$ είναι ο αριθμός Gödel κάποιας $\varphi \in A\}$ είναι αναδρομική

2) $A \vdash 0 \neq \underline{1}$

3) κάθε αναδρομική συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη στο A

4) για κάθε φυσικό αριθμό $\;$: $A \vdash \forall x(x \leq \_ \leftrightarrow x \approx \mathbf{0} \vee \cdots \vee x \approx \_)$

5) για κάθε φυσικό αριθμό $\;$: $A \vdash \forall x(x \leq \_ \vee \_ \leq x)$.

Αν το A είναι συνεπές, τότε υπάρχει τ πρόταση της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που $A \nvdash \tau$ και $A \nvdash \neg\tau$.

Το θεώρημα αυτό αναφέρεται στις ουσιαστικές συνθήκες που χρειάζονται για την απόδειξη του πρώτου θεωρήματος μη-πληρότητας. Ένα παράδειγμα συστήματος αξιωμάτων για το οποίο ισχύουν οι 1)-5) ανωτέρω είναι η 'αριθμητική Robinson' Q που προτάθηκε από τον R. Robinson το 1950. Τα αξιώματα του Q είναι τα $P1 - P6$ μαζί με το αξίωμα $\forall x_1(x_1 \not\approx \mathbf{0} \rightarrow \exists x_2(x_1 \approx x_2'))$.

Ας έρθουμε τώρα στο δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας. Θεωρούμε την πρόταση Con_P που εκφράζει "το P είναι συνεπές", δηλαδή την πρόταση

$$\neg\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4(\varphi_{PF}(x_3, x_1) \wedge \varphi_{PF}(x_4, x_2) \wedge \varphi_N(x_2, x_1)).$$

Έστω τ_G η πρόταση του πρώτου θεωρήματος μη-πληρότητας. Επειδή η πρόταση αυτή εκφράζει "εγώ δεν αποδεικνύομαι από το P", η πρόταση $Con_P \rightarrow \tau_G$ εκφράζει "αν το P είναι συνεπές, τότε η τ_G δεν αποδεικνύεται από το P", δηλαδή το μέρος α) του ίδιου θεωρήματος. Όμως η απόδειξη αυτή, που έγινε στη μεταγλώσσα, μπορεί να μεταγραφεί ως μια τυπική απόδειξη από το P. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $P \vdash Con_P \rightarrow \tau_G$. Όμως είδαμε ότι αν το P είναι συνεπές, τότε $P \nvdash \tau_G$. Συνεπώς, αν το P είναι συνεπές, ισχύει $P \nvdash Con_P$, δηλαδή προκύπτει το δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας. Όπως και το πρώτο, το δεύτερο θεώρημα ισχύει και για άλλα σύνολα αξιωμάτων - παραδείγματος χάριν, για κάθε σύνολο προτάσεων $A \supseteq P$ για το οποίο το σύνολο R_A είναι αναδρομικό. Συνήθως το δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 4.5.5 (Δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας) *Για κάθε 'αρκετά ισχυρό' σύνολο αξιωμάτων A, αν το A είναι συνεπές, τότε η συνέπειά του δεν μπορεί ν' αποδειχθεί μέσα στο A.*

Σημειώνουμε ότι ο G. Gentzen απέδειξε το 1936 ότι το P είναι συνεπές, χρησιμοποιώντας μια έννοια απόδειξης διαφορετική από τη συνήθη - συγκεκριμένα, θεώρησε αποδείξεις που έχουν μήκη που δεν είναι πεπερασμένοι, αλλά άπειροι αριθμοί.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος μη-πληρότητας, ακολουθώντας τη μέθοδο των Hilbert-Bernays, η οποία στηρίζεται στη χρήση του κατηγορήματος ‘αποδειξιμότητας’, δηλαδή του κατηγορήματος $Prov(x)$ που ορίζεται ως $\exists y \varphi_{PF}(y, x)$. Το κατηγόρημα αυτό ικανοποιεί τρεις βασικές ιδιότητες, τις εξής:

Συνθήκες αποδειξιμότητας των Hilbert-Bernays Για τυχούσες προτάσεις φ, ψ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{HB1}) & \text{αν } P \vdash \varphi, \text{ τότε } P \vdash Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil}) \\ (\mathrm{HB2}) & P \vdash Prov(\underline{\lceil \varphi \to \psi \rceil}) \to (Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil}) \to Prov(\underline{\lceil \psi \rceil})) \\ (\mathrm{HB3}) & P \vdash Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil}) \to Prov(\underline{\lceil Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil}) \rceil}). \end{array}$$

Απόδειξη. (HB1) Έστω ότι $P \vdash \varphi$. Τότε υπάρχει $\in \mathbf{N}$ που είναι αριθμός Gödel τυπικής απόδειξης του φ από το P. Τότε $P \vdash \varphi_{PF}(\_, \underline{\lceil \varphi \rceil})$, άρα $P \vdash \exists x_1 \varphi_{PF}(x_1, \underline{\lceil \varphi \rceil})$, δηλαδή $P \vdash Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil})$.

(HB2) Έστω $\mathcal{A}$ τυχόν μοντέλο του P τέτοιο που $\mathcal{A} \models Prov(\underline{\lceil \varphi \to \psi \rceil})$ και $\mathcal{A} \models Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil})$. Τότε υπάρχουν $a, b \in |\mathcal{A}|$ τέτοια που

$$\mathcal{A} \models \varphi_{PF}(a, \underline{\lceil \varphi \to \psi \rceil}) \wedge \varphi_{PF}(b, \underline{\lceil \varphi \rceil}).$$

Δηλαδή οι a, b είναι αριθμοί Gödel (ενδεχομένως nonstandard στοιχεία) τυπικών αποδείξεων των τύπων $\varphi \to \psi$ και φ, αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε τον αριθμό $c = a \frown b \frown 2^{\lceil \psi \rceil}$ στο $|\mathcal{A}|$. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτός είναι αριθμός Gödel τυπικής απόδειξης του ψ (από το P), άρα $\mathcal{A} \models \varphi_{PF}(c, \underline{\lceil \psi \rceil})$. Συνεπώς $\mathcal{A} \models Prov(\underline{\lceil \psi \rceil})$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

(HB3) Θα δώσουμε ένα σκίτσο της απόδειξης, αποφεύγοντας πολύ τεχνικές λεπτομέρειες. Το βασικό σημείο είναι ότι η απόδειξη του (HB1) μπορεί να γίνει “μέσα στο P”, οπότε προκύπτει ότι $P \vdash \varphi \to Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil})$. Συνεπώς, λόγω της (HB1), $P \vdash Prov(\underline{\lceil \varphi \to Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil}) \rceil})$. Όμως, με βάση την (HB2) έχουμε ότι

$$P \vdash Prov(\underline{\lceil \varphi \to Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil}) \rceil}) \to (Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil}) \to Prov(\underline{\lceil Prov(\underline{\lceil \varphi \rceil}) \rceil})).$$

Άρα έχουμε το ζητούμενο.

Όπως είδαμε, το πρώτο θεώρημα μη-πληρότητας αποδεικνύεται με εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου για τον τύπο $\neg Prov(x_2)$. Αν εφαρμόσουμε το ΘΣΣ για τον τύπο $Prov(x_2)$, θα προκύψει μια πρόταση τ_H τέτοια που $P \vdash \tau_H \leftrightarrow Prov(\underline{\lceil \tau_H \rceil})$. Άραγε η τ_H είναι αναποκρίσιμη πρόταση στο P ή μήπως $P \vdash \tau_H$ ή $P \vdash \neg \tau_H$; Στο ερώτημα αυτό, που έθεσε ο L. Henkin, απάντησε ο M. Löb το 1955, αποδεικνύοντας πρώτα το εξής:

Θεώρημα 4.5.6 *Για κάθε πρόταση φ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$, αν $P \vdash Prov(\underline{\lceil\varphi\rceil}) \to \varphi$, τότε $P \vdash \varphi$.*

Απόδειξη. Έστω φ τυχούσα πρόταση της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$. Εφαρμόζοντας το ΘΣΣ για τον τύπο $Prov(x_2) \to \varphi$, παίρνουμε μια πρόταση τ_L τέτοια που

$$P \vdash \tau_L \leftrightarrow (Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to \varphi \quad (1).$$

Έστω τώρα ότι $P \vdash Prov(\underline{\lceil\varphi\rceil}) \to \varphi \quad (2)$. Από την (1) και την (HB1) προκύπτει ότι

$$P \vdash Prov(\underline{\lceil\tau_L \to (Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to \varphi)\rceil}),$$

οπότε, λόγω της (HB2), έχουμε

$$P \vdash Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to Prov(\underline{\lceil Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to \varphi\rceil}) \quad (3).$$

Όμως, πάλι λόγω της (HB2),

$$P \vdash Prov(\underline{\lceil Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to \varphi\rceil}) \to [Prov(\underline{\lceil Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil})\rceil}) \to Prov(\underline{\lceil\varphi\rceil})] \quad (4).$$

Από τις (3), (4) έπεται ότι

$$P \vdash Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to [Prov(\underline{\lceil Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil})\rceil}) \to Prov(\underline{\lceil\varphi\rceil})] \quad (5).$$

Από την (HB3) προκύπτει ότι $P \vdash Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to Prov(\underline{\lceil Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil})\rceil})$, οπότε, λόγω της (5) έχουμε $P \vdash Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to Prov(\underline{\lceil\varphi\rceil}) \quad (6)$. Από τις (2), (6) παίρνουμε ότι $P \vdash Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil}) \to \varphi$ και συνεπώς, λόγω της (1), ισχύει $P \vdash \tau_L$. Άρα, λόγω της (HB1), $P \vdash Prov(\underline{\lceil\tau_L\rceil})$ και τελικά $P \vdash \varphi$, δηλαδή το ζητούμενο.

Η απάντηση στο ερώτημα του Henkin δίνεται από το

Πόρισμα 4.5.1 *$P \vdash \tau_H$ και $\mathcal{N} \models \tau_H$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της τ_H έχουμε: $P \vdash Prov(\underline{\lceil\tau_H\rceil}) \to \tau_H$. Άρα, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, $P \vdash \tau_H$. Υπάρχει λοιπόν φυσικός   που είναι αριθμός Gödel τυπικής απόδειξης του τ_H από το P. Άρα $<\ , \lceil\tau_H\rceil> \in PF$, οπότε $\mathcal{N} \models \varphi_{PF}(\ , \lceil\tau_H\rceil)$ και συνεπώς $\mathcal{N} \models Prov(\lceil\tau_H\rceil)$.

Μια άλλη άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Löb είναι το

Θεώρημα 4.5.7 (Δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας) *Αν το P είναι συνεπές, τότε $P \nvdash Con_P$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το P είναι συνεπές. Αφού $P \vdash 0 \not\approx \underline{1}$, ισχύει $P \not\vdash 0 \approx \underline{1}$. Συνεπώς, λόγω του Θεωρήματος 4.5.5, ισχύει

$$P \not\vdash Prov(\underline{\ulcorner 0 \approx \underline{1} \urcorner}) \to 0 \approx \underline{1}.$$

Αν ίσχυε $P \vdash \neg Prov(\underline{\ulcorner 0 \approx \underline{1} \urcorner})$, τότε θα ίσχυε $P \vdash Prov(\underline{\ulcorner 0 \approx \underline{1} \urcorner}) \to 0 \approx \underline{1}$, αφού ο τύπος $\neg Prov(\underline{\ulcorner 0 \approx \underline{1} \urcorner}) \to (Prov(\underline{\ulcorner 0 \approx \underline{1} \urcorner}) \to 0 \approx \underline{1})$ είναι λογικό αξίωμα (προέρχεται από την ταυτολογία $\neg p \to (p \to q)$). Συνεπώς ισχύει ότι $P \not\vdash \neg Prov(\underline{\ulcorner 0 \approx \underline{1} \urcorner})$ (1).
Επειδή $P \vdash 0 \not\approx \underline{1}$, λόγω της (HB1) έπεται ότι $P \vdash Prov(\underline{\ulcorner 0 \not\approx \underline{1} \urcorner})$. Συνεπώς (δες Άσκηση 86)

$$P \vdash Con_P \to \neg Prov(\underline{\ulcorner 0 \approx \underline{1} \urcorner}) \quad (2).$$

Άμεση συνέπεια των (1), (2) είναι ότι $P \not\vdash Con_P$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

73. Αποδείξτε το 4) της Πρότασης 4.2.1 και το 4) της Πρότασης 4.2.3.

74. Αποδείξτε το Θεώρημα 4.2.1.

75. Αποδείξτε την Πρόταση 4.2.5.

76. α) Δείξτε ότι για τυχόντες κλειστούς όρους t, s της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ ισχύει $P \vdash t \approx s$ ή $P \vdash t \not\approx s$.
β) Δείξτε ότι για κάθε πρόταση φ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ χωρίς ποσοδείκτες ισχύει $P \vdash \varphi$ ή $P \vdash \neg\varphi$.

77. Δείξτε ότι αν R_1, R_2 είναι n-μελείς σχέσεις στο $\mathbf{N}$ που είναι εκφράσιμες στο $T \subseteq \Pi(\Gamma_1^{\theta\alpha})$, τότε και οι σχέσεις $\neg R_1$, $R_1 \wedge R_2$, $R_1 \vee R_2$ είναι εκφράσιμες στο T.

78. Έστω R n-μελής σχέση στο $\mathbf{N}$, $n \geq 1$, και $T \subseteq \Pi(\Gamma_1^{\theta\alpha})$. Δείξτε ότι η R είναι εκφράσιμη στο T ανν η χαρακτηριστική της συνάρτηση C_R είναι αναπαραστάσιμη στο T.

79. Δείξτε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι αναπαραστάσιμες σε κάθε $T \subseteq \Pi(\Gamma_1^{\theta\alpha})$:

$Z_n : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ με $Z_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$
$C_k^n : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ με $C_k^n(x_1, \ldots, x_n) =$, όπου σταθερός φυσικός.

80. Δείξτε ότι οι εξής συναρτήσεις είναι πρωταρχικές αναδρομικές: $\overline{\Theta}$, min, max, rm, qt, όπου $\overline{\Theta}(x) = 1 - \Theta(x)$, $rm(x, y) =$ υπόλοιπο διαίρεσης του x με τον y και $qt(x, y) =$ πηλίκο διαίρεσης του x με τον y. Επίσης δείξτε ότι οι συναρτήσεις $|x - y|$, x^y, $x!$ είναι πρωταρχικές αναδρομικές.

81. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο φυσικών είναι πρωταρχικά αναδρομικό.

82. Έστω $[\sqrt{n}]$ ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι $\leq \sqrt{n}$ και $\pi(n)$ το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι $\leq n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι $[\sqrt{n}]$, $\pi(n)$ είναι πρωταρχικές αναδρομικές.

83. Έστω $R \subseteq \mathbf{N}^n$, $n \geq 1$. Λέμε ότι η R είναι 'αριθμητική' ανν υπάρχει τύπος $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοιος που

$$R = \{< m_1, \ldots, m_n > \in \mathbf{N}^n : \mathcal{N} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n)\}.$$

Δείξτε ότι κάθε αναδρομική σχέση είναι αριθμητική.

84. Έστω τ_G η πρόταση που είδαμε στο πρώτο θεώρημα μη-πληρότητας. Δείξτε ότι αν το P είναι συνεπές, τότε το $P + \neg\tau_G$ είναι συνεπές, αλλά όχι ω-συνεπές.

85. Δείξτε ότι το σύνολο $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi$ πρόταση της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που $\mathcal{N} \models \varphi\}$ δεν είναι αναδρομικό.

86. Έστω σ πρόταση της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια που $P \vdash Prov(\underline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Δείξτε ότι $P \vdash Con_P \to \neg Prov(\underline{\ulcorner\neg\sigma\urcorner})$.

87. Σε κάθε μια από τις εξής περιπτώσεις, εφαρμόζουμε το ΘΣΣ για να βρούμε μια πρόταση της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ με τη ζητούμενη ιδιότητα. Βρείτε αν η πρόταση αυτή είναι αναποκρίσιμη στο P, αποδείξιμη στο P ή η άρνησή της είναι αποδείξιμη στο P.
α) Μια πρόταση τ_1 που εκφράζει ότι $P \nvdash \neg\tau_1$.
β) Μια πρόταση τ_2 που εκφράζει $P \vdash \neg\tau_2$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

1. Γ. Μητακίδης: *Από τη Λογική στο Λογικό Προγραμματισμό και την Prolog*, εκδ. Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1992.
2. Μ. Μπόριτσιτς: *Λογική και Απόδειξη*, εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1995.
3. Α. Τζουβάρας: *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*, εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1987.

Ξένη

1. H. D. Ebbinghaus, J. Flum & W. Thomas: *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1994.
2. H. B. Enderton: *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, 1972.
3. A. G. Hamilton: *Logic for mathematicians*, Cambridge University Press, 2nd ed., 1988.
4. M. Machover: *Set theory, logic and their limitations*, Cambridge University Press, 1996.
5. E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*, Wadsworth & Brooks /Cole, 1987.
6. D. van Dalen: *Logic and Structure*, Springer-Verlag, 1994.