# Ασκήσεις Θεωρίας Συνόλων

**Άσκηση 1.** Να δείξετε ότι για κάθε σύνολο $A$ ισχύει $\bigcup\mathcal{P}(A) = A$.

**Λύση.** Έστω $x \in \bigcup\mathcal{P}(A)$. Άρα $x \in y$, για κάποιο $y \in \mathcal{P}(A)$. Όμως τότε $y \subseteq A$, άρα $x \in A$. Έτσι $\bigcup\mathcal{P}(A) \subseteq A$.

Αντίστροφα, έστω $x \in A$. Έχουμε ότι $A \in \mathcal{P}(A)$, άρα $x \in \bigcup\mathcal{P}(A)$. Έτσι $A \subseteq \bigcup\mathcal{P}(A)$.

**Άσκηση 2.** Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \omega$ ισχύει $\omega \notin n$.

**Λύση.** Έστω $n \in \omega$ και ας υποθέσουμε ότι ισχύει $\omega \in n$. Τότε από τη μεταβατική ιδιότητα (θεώρημα 3, σελ. 49, σημειώσεις κ. Σκανδάλη) έπεται ότι $n \in n$. Άτοπο, από τη πρόταση 5, σελ 47, σημειώσεις κ. Σκανδάλη.

**Άσκηση 3.** Δείξτε ότι η πεπερασμένη ένωση πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένη.

**Λύση.** Με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ θα δείξουμε ότι $A_1 \cup ... A_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο αν όλα τα $A_i$ είναι πεπερασμένα.

Για $n = 1$ ισχύει τετριμμένα.

Για $n = 2$, το έχουμε δείξει στη πρόταση 4, σελ. 66, σημειώσεις κ. Σκανδάλη.

Έστω ότι ισχύει για $n$, θα δείξουμε για $n+1$. Έστω $A_1 ..., A_{n+1}$ πεπερασμένα σύνολα. Έχουμε ότι $A_1 \cup ... A_n \cup A_{n+1} = (A_1 \cup ... A_n) \cup A_{n+1}$. Από επαγωγική υπόθεση, $A_1 \cup ... A_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο και άρα με την εφαρμογή της αναφερόμενης πρότασης 4, έπεται το ζητούμενο.

**Άσκηση 4.** Έστω $(A, <_A)$ (γνήσια) καλά διατεταγμένο σύνολο και έστω $b \notin A$. Ορίζουμε σύνολο $B = A \cup \{b\}$ και τη σχέση $<_B$ να είναι

$$x <_B y \iff (x, y \in A \text{ και } x <_A y) \text{ ή } (x \in A \text{ και } y = b)$$

.

1. Να δείξετε ότι A είναι αρχικό τμήμα του (B, $<_B$).

2. Η σχέση $<_B$ είναι καλή διάταξη.

**Λύση.**

1. Έχουμε ότι A είναι ένα υποσύνολο του B. Έστω $x \in A$ και $y <_B x$. Από τον ορισμό της $<_B$, έχομε ότι αναγκαστικά $y \in A$. Άρα A είναι αρχικό τμήμα του B.

2. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι γνήσια γραμμική και ότι κάθε μη κενό υποσύνολο του B έχει ελάχιστο στοιχείο. Από τις τέσσερις ιδιότητες της γνήσιας γραμμικής διάταξης θα δείξουμε τη μεταβατική. Έστω $x <_B y$, $y <_B z$, οπότε $x, y \in A$ αναγκαστικά, ενώ για το $z$ διακρίνουμε περιπτώσεις: Αν $z \in A$, τότε επειδή $<_A$ είναι μεταβατική και $x <_A y$, $y <_A z$, έχουμε $x <_A z$, άρα $x <_B z$. Αν $z \in B$, τότε επειδή $x \in A$, από τον ορισμό της $<_A$, έχουμε οτι $x <_B z$. Όσο αναφορά την ιδιότητα της καλής διάταξης: έστω X μη κενό υποσύνολο του B. Διακρίνουμε περιπτώσεις: Αν $b \notin X$, τότε X είναι μη κενό υποσύνολο του A, άρα έχει ελάχιστο, επειδή το A είναι καλά διατεταγμένο. Αν $b \in X$, τότε ξανα-διακρίνουμε περιπτώσεις για το X: Αν $X = \{b\}$, τότε το ελάχιστο στοιχείο είναι το $b$. Αν $X = X_0 \cup \{b\}$, με $X_0 \neq \emptyset$, υποσύνολο του A, τότε $X_0$ έχει ελάχιστο και αυτό το ελάχιστο, λόγω διάταξης στο B, είναι και ελάχιστο του X.